

Alpha Sabine

Frédéric Poirrier
Octobre 2014
(MAJ Avril 2016)

Le coefficient d'absorption de Sabine d'un matériau est une donnée importante qui intervient de manière récurrente en acoustique des salles. En calcul prédictif, lorsqu'il s'agit d'estimer les durées de réverbération dans des locaux réglementés (salle de sports, restaurants scolaires ...) il est important de bien comprendre la façon dont se déterminent les alphas Sabine ou les coefficients d'absorption des matériaux de correction. L'objet de cet exposé est de décrire, au moins dans les grands principes, quelques méthodes usuelles qui permettent la détermination des coefficients d'absorption des matériaux de correction. Dans un premier temps, on indiquera la méthode de détermination des coefficients d'absorption de Sabine en chambre réverbérante à partir de la mesure des durées de réverbération. Puis on décrira le principe de la mesure dans un tube à ondes stationnaires. On établira également, la relation théorique donnant le coefficient d'absorption de matériaux poreux ou fibreux d'après la seule connaissance de sa résistivité à l'écoulement de l'air. Pour finir, on donnera une méthode permettant d'estimer, in situ, le coefficient d'absorption d'un matériau. En annexe, on trouvera quelques outils mathématiques nécessaires à la compréhension des démonstrations.

L'approche choisie pour la rédaction de cet exposé s'appuie largement sur les équations fondamentales de l'acoustique et la démarche reste dans l'ensemble assez mathématique. Malgré tout, le lecteur non familiarisé avec les notions scientifiques pourra consulter avantageusement les graphiques qui résument l'essentiel des résultats.

À noter que ce document de synthèse s'inspire, en partie, du cours de Manuel Melon de l'unité d'enseignement *d'acoustique des salles et bâtiment* du Conservatoire National des Arts et Métiers.

Sommaire

1.	Mesure du coefficient d'absorption de Sabine en chambre réverbérante	page 3
2.	Mesure du coefficient d'absorption dans un tube à ondes stationnaires	page 7
3.	Coefficient d'absorption théorique d'un matériau poreux dans le modèle « fluide équivalent » sous incidence normale	page 10
4.	Corrélation entre la résistivité et la masse volumique d'une laine minérale	page 17
5.	Coefficient d'absorption théorique d'un bicouche poreux dans le modèle « fluide équivalent » sous incidence normale	page 20
6.	Coefficient d'absorption théorique d'un matériau poreux dans le modèle « fluide équivalent » sous incidence quelconque	page 25
7.	Coefficient d'absorption sous incidence normale & coefficient d'absorption de Sabine en champ diffus	page 30
8.	Coefficient d'absorption mesuré in situ par la méthode du doublet microphonique	page 34
9.	Mesure du coefficient d'absorption par la méthode du doublet microphonique d'Allard & Sieben	page 37
	Annexe A : Résistivité au passage de l'air	page 40
	Annexe B : Condition de l'approximation onde plane	page 43
	Annexe C : Impédance ramenée	page 44
	Annexe D : Tangente d'un nombre complexe	page 48
	Annexe E : Z_m et k_m selon Miki et Mechel & Grundmann	page 50
	Annexe F : Coefficient d'absorption d'un matériau poreux sur support non rigide ...	page 55

1) Mesure du coefficient d'absorption de Sabine en chambre réverbérante

Les coefficients d'absorption « catalogue » des matériaux de correction acoustique sont le plus souvent déterminés selon cette méthode, c'est-à-dire par mesure de temps de réverbération en chambre réverbérante. Le protocole expérimental est décrit dans la norme, NF EN ISO 354 (septembre 2004) relative aux mesurages de l'absorption acoustique en salle réverbérante.

Le principe est relativement simple puisqu'il s'agit de mesurer en champ diffus le temps de réverbération d'une salle, **sans et avec** le matériau. De la connaissance de ces durées de réverbération et avec l'utilisation de la formule de Sabine, on peut déduire aisément le coefficient d'absorption de Sabine de l'échantillon entreposé dans le local.

La relation de Sabine se rencontre, le plus souvent, sous cette forme :

$$T = \frac{0,16 V}{A}$$

Avec

T durée de réverbération abusivement dit « temps » de réverbération, exprimée en seconde.

V volume de la salle, exprimé en m³.

A absorption équivalente de Sabine de la salle, exprimée en m².

Néanmoins sous sa forme originelle, elle s'exprime en fonction de la célérité du son c :

(<http://conseils-acoustique.com/index.php/formule-de-sabine>)

$$T = \frac{55,3 V}{cA} \quad (1)$$

Cette dernière expression a l'avantage de tenir compte de la célérité du son qui peut varier de façon notable en fonction de la température, détail pouvant avoir une légère incidence sur les résultats des mesurages en laboratoire d'essais.

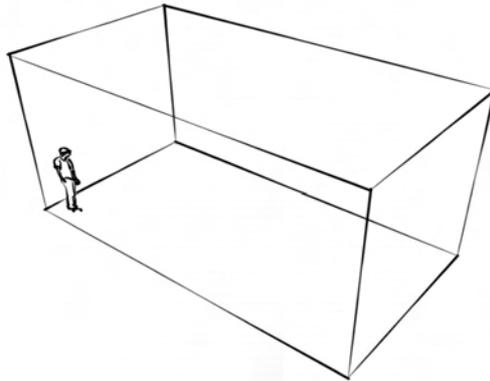
Rappelons que l'absorption équivalente de Sabine A de la salle est définie en fonction du coefficient d'absorption de Sabine des parois, noté α_{salle} et de la surface totale S (des parois) par :

$$A = S \alpha_{salle}$$

Dans un local ordinaire le coefficient d'absorption de la salle correspondrait à une valeur moyenne. Mais dans une chambre réverbérante comme l'absorption des parois est homogène (ou presque), le coefficient d'absorption moyen de la salle est très proche du coefficient d'absorption de la paroi.

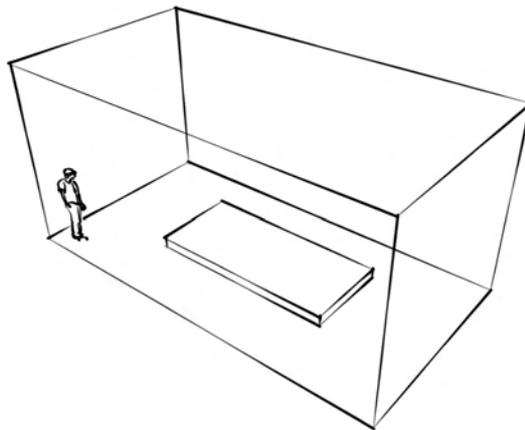
Dans la salle vide, on mesure la durée de réverbération T_1 .

$$T_1 = \frac{55,3 V}{c A_1} = \frac{55,3 V}{c S \alpha_{salle}} \quad (1)$$



Puis dans la même salle contenant l'échantillon de matériau, on mesure la durée de réverbération T_2 . On note S_e la surface de l'échantillon et $\alpha_{matériau}$ son coefficient d'absorption.

$$T_2 = \frac{55,3 V}{c A_2} \quad \text{d'où} \quad A_2 = \frac{55,3 V}{c T_2} \quad (2)$$



Par ailleurs, l'absorption de la salle contenant l'échantillon, notée A_2 , peut s'écrire :

$$A_2 = (S - S_e) \alpha_{salle} + S_e \alpha_{matériau} \quad (3)$$

où le terme $S_e \alpha_{matériau}$ représente l'absorption apportée à la salle par l'échantillon.

Et $(S - S_e) \alpha_{salle}$ est l'absorption de la salle à laquelle on a retiré l'absorption de la surface masquée par

l'échantillon posé au sol.

De la mesure de T_1 , on tire α_{salle} (relation (1))

$$\alpha_{salle} = \frac{55,3 V}{c S T_1} \quad (4)$$

De la relation (3), on extrait $\alpha_{matériau}$ que l'on écrit maintenant accompagné de la lettre S pour signifier que le coefficient d'absorption est de Sabine:

$$\alpha_{Smatériau} = \frac{A_2 - (S - S_e) \alpha_{salle}}{S_e}$$

Soit encore en éliminant A_2 et α_{salle} de cette dernière expression, en utilisant respectivement les relations (2) et (4) :

$$\alpha_{Smatériau} = \frac{\frac{55,3 V}{c T_2} - (S - S_e) \frac{55,3 V}{c S T_1}}{S_e}$$

Après réarrangement, il vient :

$$\alpha_{Smatériau} = \frac{55,3 V}{c} \left[\frac{1}{S_e T_2} + \left(1 - \frac{S}{S_e}\right) \frac{1}{S T_1} \right] \quad (5)$$

En remarquant que la surface de l'échantillon S_e est très petite devant celle des parois de la salle ($S_e \ll S$), on peut négliger 1 devant $\frac{S}{S_e}$, l'expression (5) se simplifie aisément. Au final, le coefficient d'absorption de Sabine du matériau se déduit de :

$$\alpha_{Smatériau} \approx \frac{55,3 V}{c S_e} \left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right]$$

Les laboratoires d'essais font plutôt usage de la relation figurant ci-dessous, qui présente l'avantage de pouvoir effectuer les mesures, sans et avec l'échantillon, à des instants différents car elle prend en compte des corrections « atmosphériques » de température et hygrométriques:

$$\alpha_{Smatériau} \approx \frac{55,3 V}{S_e} \left[\frac{1}{c_2 T_2} - \frac{1}{c_1 T_1} \right] - \frac{4V}{S_e} (m_1 - m_2)$$

où m_1 et m_2 sont les coefficients d'atténuation en puissance, exprimés en m^{-1} , dépendant de la température et de l'hygrométrie de la salle.

Notons que cette méthode n'est strictement valide qu'en chambre réverbérante parce que le champ sonore réverbéré doit être parfaitement diffus. Les durées de réverbération doivent être suffisamment longues pour que les multiples réflexions contre les parois favorisent la diffusion. La norme ISO 354 impose plusieurs conditions, notamment sur les caractéristiques de la salle d'essais, afin de minimiser l'incidence des modes propres. Le local de mesurage doit avoir (entre autre) :

- un volume supérieur à 150 m^3 (200 m^3 pour les constructions récentes).
- des dimensions différentes sans pour autant être dans un rapport multiple.
- la plus grande dimension inférieure à $1,9 \sqrt[3]{V}$
- une aire d'absorption équivalente $A < 6,5 \text{ m}^2$ pour les bandes d'octaves de 125 à 500 Hz...
- taux hygrométrique supérieur à 40 %

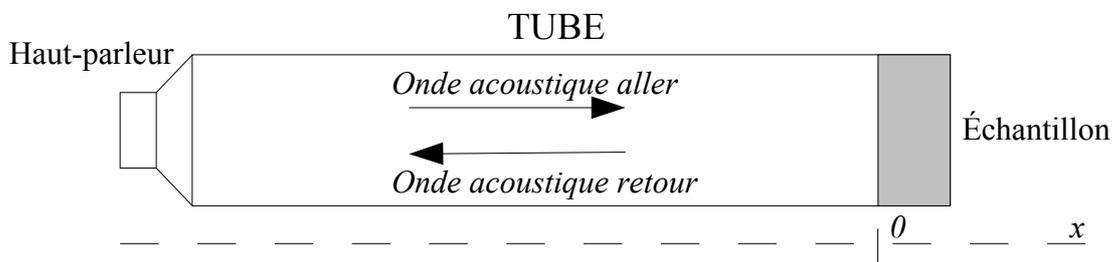
Il existe également des conditions sur l'échantillon testé.

- aire de l'échantillon comprise en 10 et 12 m^2 (pour les salles de volume inférieur à 250 m^3).
- un rapport largeur/longueur compris entre 0,7 et 1.
- doit être positionné à plus d'un mètre des murs.
- les côtés de l'échantillon ne doivent pas être parallèles aux murs.

Les coefficients d'absorption de Sabine ainsi mesurés sont dits en « champ diffus » pour les distinguer de ceux déterminés par d'autres méthodes également très classiques dont la plus répandue est certainement celle qui utilise un tube à ondes stationnaires.

2) Mesure du coefficient d'absorption dans un tube à ondes stationnaires

L'intérêt de la méthode de mesure du coefficient d'absorption au tube à ondes stationnaires (dit aussi tube de **Kundt** ou à impédance) réside surtout dans sa grande facilité de mise en œuvre et son faible coût. En effet, le matériel utilisé reste relativement ordinaire et peu coûteux. Toutefois, la méthode permet de mesurer le coefficient d'absorption que **sous incidence normale**.



La modélisation qui suit, suppose le diamètre d du tube petit devant la longueur d'onde λ rayonnée par la source sonore ($d \ll \lambda$). Ainsi le problème devient unidimensionnel car la propagation des ondes se fait suivant l'axe x . Le modèle ne prend pas en compte d'éventuelles pertes thermiques ou visqueuses dans le tube et considère la membrane du haut-parleur parfaitement réfléchissante (de toute façon une correction est toujours possible après mesure de l'absorption de la membrane du HP).

Exprimons la pression acoustique dans le tube, qui dépend de l'abscisse x et du temps t . Elle peut s'écrire comme la superposition d'une onde plane se propageant dans le sens des x croissants et d'une onde plane se propageant dans le sens des x décroissants.

$$p(x; t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)} = [Ae^{-jkx} + Be^{jkx}]e^{j\omega t} \quad (6)$$

avec

ω pulsation de l'onde rayonnée par le haut-parleur

k nombre d'onde

A et B étant les amplitudes complexes contenant l'information de phase

On peut introduire le coefficient de réflexion en pression, noté R_p , à l'interface du matériau en $x=0$, quantité complexe, définie par le rapport des amplitudes de l'onde réfléchie et de l'onde incidente :

$$R_p = \frac{B}{A} = r e^{j\varphi}$$

avec le module $r = |R_p|$ et l'argument $\varphi = \arg(R_p)$

La pression dans le tube (6) s'exprime alors en fonction de R_p :

$$p(x; t) = A [e^{-jkx} + R_p e^{jkx}] e^{j\omega t}$$

soit encore :

$$p(x; t) = A [e^{-jkx} + r e^{j(kx + \varphi)}] e^{j\omega t}$$

Puis en mettant e^{-jkx} en facteur :

$$p(x; t) = A e^{-jkx} [1 + r e^{j(2kx + \varphi)}] e^{j\omega t} \quad (7)$$

En un (ou plusieurs) point du tube, la pression est maximale lorsque l'onde aller et l'onde retour sont en phase, c'est-à-dire lorsque dans la relation (7) : $2kx + \varphi = 2n\pi$ avec $n=0, 1, 2, \dots$

Dans ce cas, $e^{2n\pi j} = 1$ et la pression maximale qui correspond à un noeud dans le système d'onde stationnaire qui s'est établi dans le tube, s'écrit en module :

$$p_{max} = |A|(1+r)$$

De même, la pression est minimale dans le tube lorsque l'onde aller et l'onde retour sont en opposition de phase, c'est-à-dire lorsque dans la relation (7) : $2kx + \varphi = -\pi + 2n\pi$ avec $n=0, 1, 2, \dots$

Dans ce cas, $e^{(-\pi + 2n\pi)j} = -1$ et la pression minimale, correspondant maintenant à un ventre dans le système d'onde stationnaire, s'écrit en module :

$$p_{min} = |A|(1-r)$$

En introduisant le rapport des pressions, appelé taux d'onde stationnaire noté TOS, il vient :

$$TOS = \left| \frac{p_{max}}{p_{min}} \right| = \frac{1+r}{1-r}$$

En retournant cette dernière relation, on exprime r en fonction des pressions maximales et minimales :

$$r = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}}$$

Le coefficient d'absorption sous incidence normale est défini en énergie par :

$$\alpha_n = 1 - |R_p|^2 = 1 - r^2$$

Sous incidence normale, α_n se déduit de la mesure des pressions maximales et minimales, dans le tube :

$$\alpha_n = 1 - \left(\frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}} \right)^2 = \frac{4P_{max} P_{min}}{(P_{max} + P_{min})^2}$$

En pratique, on recherche et on mesure les pressions maximales et minimales en déplaçant le microphone dans le tube. On est souvent limité aux basses fréquences par la longueur du tube (résonance en quart d'onde) et en haute fréquence par le diamètre de celui-ci. Ainsi pour couvrir les dix huit bandes de tiers d'octave usuelles de 100 à 5000 Hz, il faut faire usage de deux tubes de diamètre différents. Un gros tube de diamètre 10 cm et de longueur 1 m satisfera au besoin de la mesure dans les basses fréquences et un plus petit, de diamètre 3,4 cm satisfaisant à la condition $d \ll \lambda$ pour les hautes fréquences. L'inconvénient de la méthode est lié au fait que les échantillons de matériaux à mesurer sont nécessairement de petites tailles (adaptées au diamètre du tube) et pas forcément représentatifs d'un comportant, en situation.

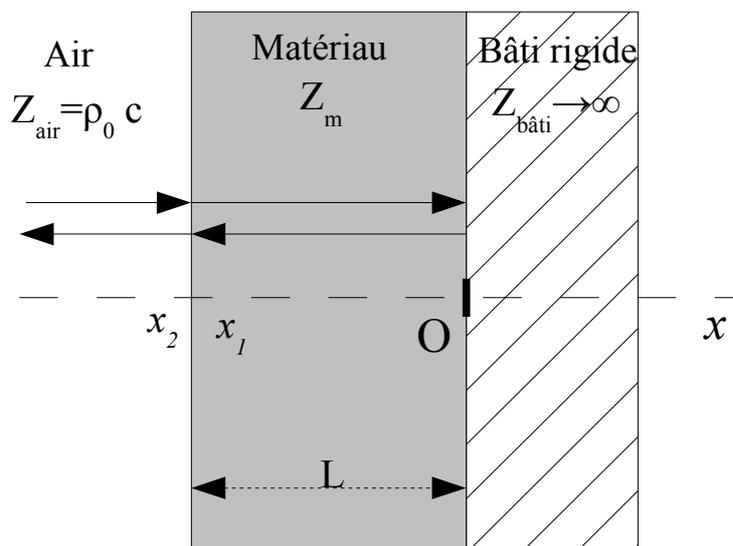
3) Coefficient d'absorption théorique d'un matériau poreux dans le modèle « fluide équivalent » sous incidence normale

On cherche maintenant à établir un modèle théorique donnant le coefficient d'absorption α_n d'un matériau poreux sous incidence normale. On suppose que le matériau se comporte comme une couche fluide d'impédance acoustique **caractéristique** Z_m où une onde plane s'y propage avec la célérité c_m . Le vecteur d'onde k_m s'écrit alors :

$$k_m = \frac{\omega}{c_m}$$

Z_m et k_m étant des grandeurs complexes pour prendre en compte les effets dissipatifs de l'énergie acoustique (voir annexe D). Les matériaux poreux sont le plus souvent constitués d'une phase fluide, en général de l'air et d'une phase solide qui forme la structure. Dans le modèle « fluide équivalent », on suppose que la structure solide est immobile et que les grandes surfaces de contact entre le fluide et le squelette solide dissipent l'énergie sonore par effet visqueux et thermique. On considère donc, dans ce modèle, que le matériau poreux se comporte comme un **fluide dissipatif**.

Étudions la situation schématisée ci-dessous où un matériau poreux d'épaisseur L est accolé à un support supposé, par hypothèse, infiniment rigide.



x_1 et x_2 sont les abscisses, respectivement à droite et à gauche, de l'interface air-matériau.

Le coefficient d'absorption en énergie α_n sous incidence normale s'écrit à l'interface air-matériau en fonction du coefficient de réflexion en pression R_p :

$$\alpha_n = 1 - |R_p(x_2)|^2$$

Le problème consiste alors à exprimer le coefficient de réflexion $R_p(x_2)$ en fonction des grandeurs qui caractérisent le matériau poreux, c'est-à-dire l'impédance acoustique caractéristique Z_m , le nombre d'onde k_m et son épaisseur L .

Pour cela, exprimons d'abord l'impédance acoustique **spécifique** en x_1 en fonction de celle connue en $x = 0$. Nous utilisons la formule de l'impédance ramenée (voir annexe C), soit :

$$Z(x_1) = \frac{Z(0) + jZ_m \tan(k_m L)}{1 + j \frac{Z(0)}{Z_m} \tan(k_m L)}$$

Or le support est par hypothèse infiniment rigide.

$$Z(0) = Z_{\text{bâti}} \rightarrow \infty$$

d'où

$$Z(x_1) \approx -j \frac{Z_m}{\tan(k_m L)}$$

On suppose, qu'à l'interface air-matériau, il y a continuité de l'impédance acoustique spécifique. Hypothèse valable que si la porosité du matériau est proche de 1. Cette condition est vérifiée pour les laines minérales dont la porosité est habituellement comprise entre 0,92 et 0,99. Dans le cas contraire, il faudrait considérer la conservation du débit acoustique.

$$Z(x_2) = Z(x_1) = -j \frac{Z_m}{\tan(k_m L)}$$

Exprimons maintenant la pression dans l'air, qui s'écrit comme la superposition d'une onde plane se propageant dans le sens des x croissants et d'une autre rétrograde se propageant dans le sens des x décroissants :

$$p(x; t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{pour } x \leq -L$$

A et B étant les amplitudes complexes contenant l'information de phase.

L'équation d'Euler, dont l'expression est, pour une dimension :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

permet d'écrire la vitesse particulière $v(x;t)$ dans l'air :

$$v(x;t) = \frac{Ae^{j(\omega t - kx)} - Be^{j(\omega t + kx)}}{\rho_0 c} \quad \text{pour } x \leq -L$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air et c la célérité du son. Le produit $\rho_0 c$ représente l'impédance acoustique caractéristique du milieu de propagation (ici l'air).

Par ailleurs, le coefficient de réflexion en pression à l'interface air-matériau en $x = -L$ s'écrit par définition :

$$R_p = \frac{Be^{-jkL}}{Ae^{jkL}} = \frac{B}{A} e^{-2jkL}$$

C'est le rapport des pressions de l'onde retour et de l'onde aller.

D'autre part, dans l'air, l'impédance acoustique spécifique s'écrit par définition :

$$Z(x) = \frac{p(x;t)}{v(x;t)} = \rho_0 c \frac{Ae^{-jkx} + Be^{jkx}}{Ae^{-jkx} - Be^{jkx}} \quad \text{pour } x \leq -L$$

En particulier, à l'interface air-matériau en $x_2 = -L$

$$Z(x_2) = \frac{p(x_2;t)}{v(x_2;t)} = \rho_0 c \frac{Ae^{jkL} + Be^{-jkL}}{Ae^{jkL} - Be^{-jkL}}$$

En mettant Ae^{jkL} en facteur au numérateur et au dénominateur, il vient aisément :

$$Z(x_2) = \rho_0 c \frac{1 + R_p}{1 - R_p}$$

En retournant cette expression, on trouve le coefficient de réflexion en pression R_p

$$R_p = \frac{Z(x_2) - \rho_0 c}{Z(x_2) + \rho_0 c}$$

On a établi précédemment que :

$$Z(x_2) = -j \frac{Z_m}{\tan(k_m L)} = -j Z_m \cotan(k_m L)$$

En substituant $Z(x_2)$ par cette dernière expression, le coefficient de réflexion en pression s'écrit en fonction de l'impédance qui caractérise le matériau poreux Z_m , le nombre d'onde k_m et l'épaisseur de matériau L , ainsi que l'impédance caractéristique de l'air $\rho_0 c$.

$$R_p = \frac{jZ_m \cotan(k_m L) + \rho_0 c}{jZ_m \cotan(k_m L) - \rho_0 c}$$

Au final, le coefficient d'absorption sous incidence normale s'écrit :

$$\alpha_n = 1 - |R_p(x_2)|^2 = 1 - \left| \frac{jZ_m \cotan(k_m L) + \rho_0 c}{jZ_m \cotan(k_m L) - \rho_0 c} \right|^2 \quad (8)$$

À noter que cette expression prend en compte des réflexions multiples ayant lieu à l'intérieur du matériau poreux.

Ceci étant, la relation (8) n'a d'intérêt pratique que si nous sommes capables de définir l'impédance caractéristique du matériau poreux Z_m ainsi que le nombre d'onde k_m .

Le modèle le plus couramment utilisé pour exprimer Z_m et k_m est celui de **Delany & Basley** (1970) qui ont établi des formulations empiriques après de nombreuses mesures au tube à ondes stationnaires. Le modèle de Delany & Basley présente l'avantage de caractériser l'impédance du matériau poreux, à une fréquence donnée, en fonction d'un paramètre unique, la **résistivité à l'écoulement de l'air**, notée σ , qui s'exprime en Pa.s/m² (voir annexe A)

Ils proposent les deux relations suivantes.

Pour l'impédance acoustique caractéristique :

$$Z_m = \rho_0 c \left(1 + 0,0571 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,754} - 0,087 j \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,732} \right)$$

et le nombre d'onde :

$$k_m = \frac{\omega}{c} \left(1 + 0,0978 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,700} - 0,189 j \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,595} \right)$$

Où $\rho_0 \frac{f}{\sigma}$ est une quantité sans dimension.

En réalité, les formulations figurant ci-dessus sont celles d'**Allard & Champoux** (1990) qui ont apporté quelques corrections aux coefficients des relations initialement établies par **Delany & Bazley**. Dans la suite de l'exposé, on adopte la terminologie de **Delany & Bazley** en lieu et place d'**Allard & Champoux** comme il est souvent d'usage dans la littérature acoustique.

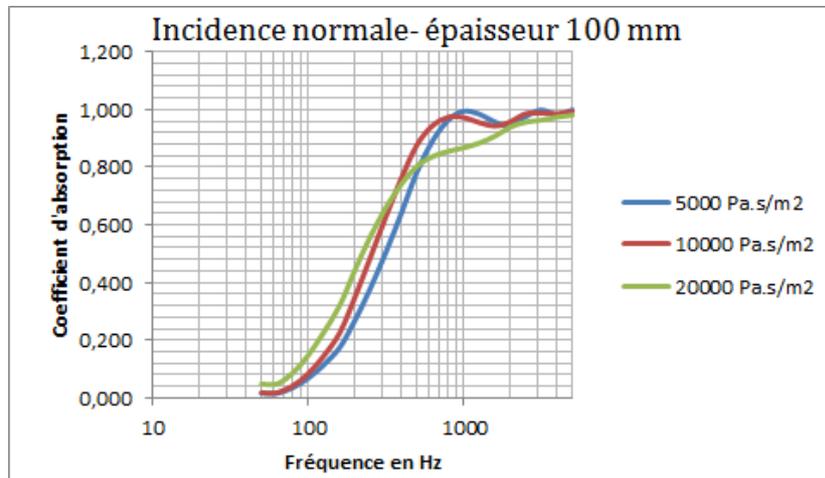
Signalons que les formulations de **Delany & Bazley** sont valides pour des matériaux ayant :

- une résistivité à l'écoulement de l'air σ comprise entre **1000 et 50000 Pa.s/m²**
- une quantité $\rho_0 \frac{f}{\sigma}$ comprise entre **0,01 et 1**.

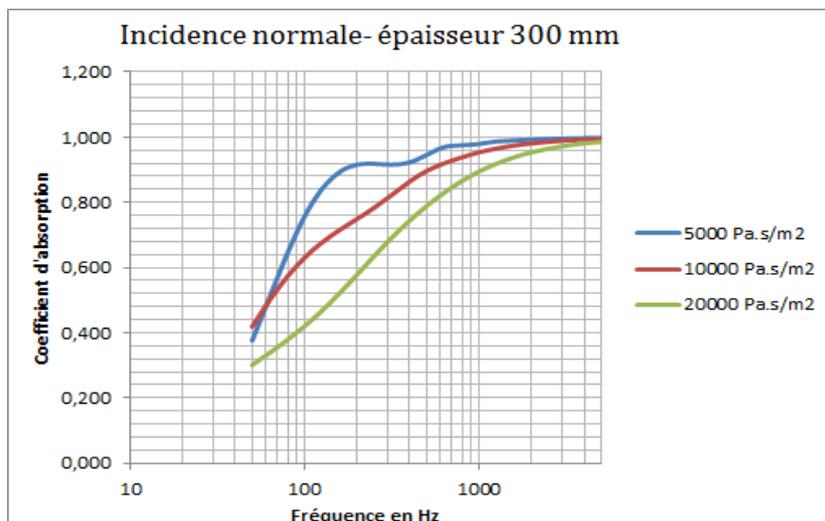
Ces deux conditions, limitent l'utilisation du modèle de **Delany & Bazley**, au moins au sens strict, dans les basses fréquences pour des matériaux ayant une résistivité à l'écoulement de l'air assez forte. Par exemple, en limite de validité, si la résistivité σ vaut 50000 Pa.s/m² alors le modèle de **Delany & Bazley** est réaliste pour des zones fréquentielles supérieures à 400 Hz. Il est cependant possible de recourir à d'autres modèles. Signalons ceux de **Miki** (1990) et de **Mechel & Grundmann** (2002), plus adaptés dans les basses fréquences que celui de **Delany & Bazley** (**voir annexe E**).

Par ailleurs, remarquons qu'avec $\sigma = 0$, résistance à l'écoulement de l'air **de l'air**, on retrouve dans les formulations de **Delany & Bazley** l'impédance acoustique caractéristique de l'air, $Z_{air} = \rho_0 c$ et le nombre d'onde $k = \omega/c$.

Z_m et k_m étant maintenant définis, on peut utiliser la relation (8) pour simuler le coefficient d'absorption sous incidence normale α_n à plusieurs fréquences et en faisant varier la résistivité à l'écoulement de l'air afin d'évaluer son influence sur l'absorption. Les résultats figurent dans la graphique ci-dessous, pour une laine minérale :

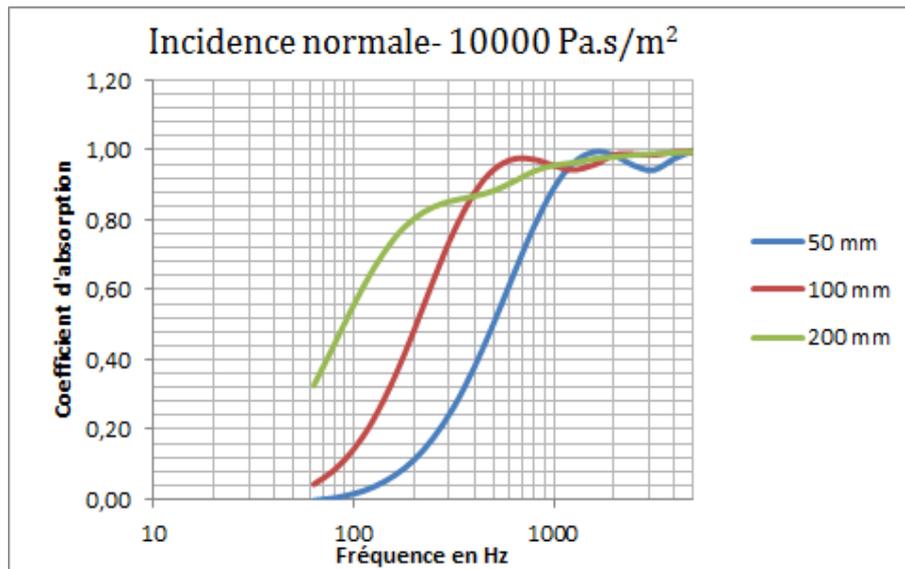


On observe qu'une forte résistivité à l'écoulement de l'air favorise l'absorption dans les basses fréquences au détriment de l'absorption dans les hautes fréquences. Attention, ce résultat n'est vrai que pour l'épaisseur particulière de 100 mm.



Pour 300 mm d'épaisseur, c'est maintenant la faible résistivité qui favorise l'absorption dans les basses fréquences ! Il convient donc d'être vigilant et d'étudier l'absorption du matériau au cas par cas et de garder à l'esprit les conditions d'utilisation du modèle de Delany & Bazley pas forcément fiable aux très basses fréquences.

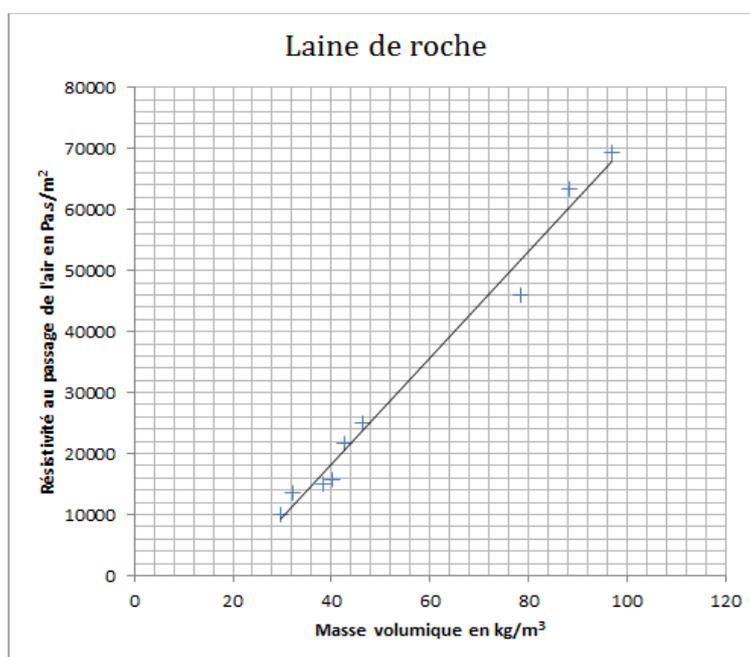
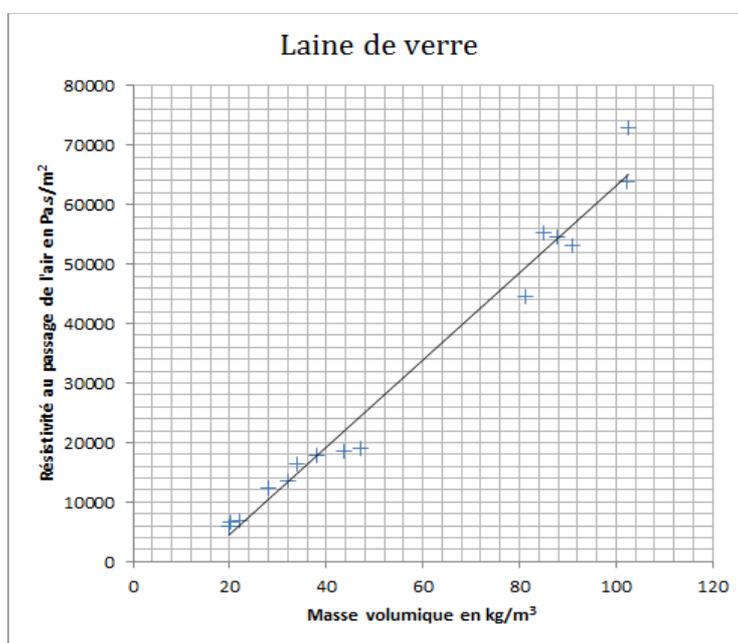
De même, en faisant varier l'épaisseur du matériau à résistivité constante :



On constate que l'absorption dans les basses fréquences augmente avec l'épaisseur du matériau, sans que pour autant, cela soit généralisable aux hautes fréquences.

4) Corrélation entre la résistivité et la masse volumique d'une laine minérale

À l'usage, il est assez rare que la documentation technique d'un matériau de correction acoustique poreux indique la résistivité au passage de l'air. Pour une laine minérale, il serait commode d'établir une relation mathématique simple entre sa masse volumique ρ_m et sa résistivité σ . Dans les graphiques ci-dessous, ont été reportés les nuages de points correspondant aux couples $(\rho_m ; \sigma)$ de quinze laines de verre et neuf laines de roche, dont les résistivités à l'écoulement de l'air ont été déterminées en laboratoire d'essais.



Les nuages de points corréleront assez bien l'accroissement de la résistivité avec la masse volumique des laines minérales.

Les droites d'ajustement des nuages de points précédents ont pour équation :

- Pour la laine de verre : $\sigma = 735\rho_m - 10109$
- Pour la laine de roche : $\sigma = 772\rho_m - 16716$

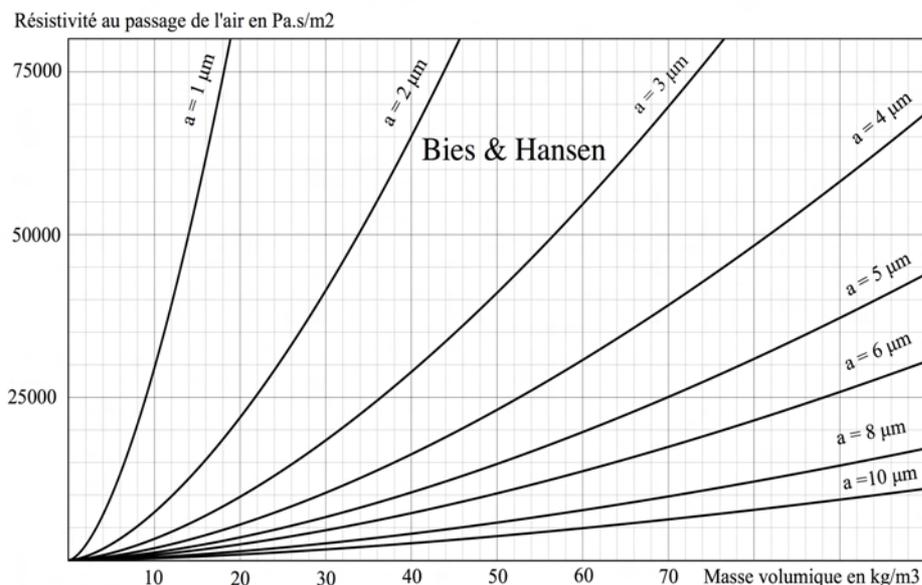
Cependant, ces équations de droites qui relient la résistivité à la masse volumique, sont trop imprécises pour pouvoir constituer un modèle prévisionnel correct, car en pratique la recherche de la résistivité optimale se fait souvent à 1000 ou 2000 Pa.s/m² près.

Malgré tout, en restreignant le premier nuage de point aux sept premiers échantillons de laine de verre, c'est-à-dire celles qui sont « à faible densité », la droite de régression se resserre pour donner :

$$\sigma \approx 680 \rho_m - 7480 \quad \text{pour } \rho_m < 40 \text{ kg/m}^3$$

Il existe néanmoins, des relations empiriques et semi-empiriques qui donnent la résistivité à l'écoulement de l'air en fonction de divers paramètres. Parmi elles, signalons celle de **Bies & Hansen** concernant les laines de verre qui présente l'atout de ne dépendre que de deux grandeurs, le rayon de la fibre a et la masse volumique ρ_m :

$$\sigma = 7,95 \cdot 10^{-10} \left(\frac{\rho_m}{a^2} \right)^{1,57}$$



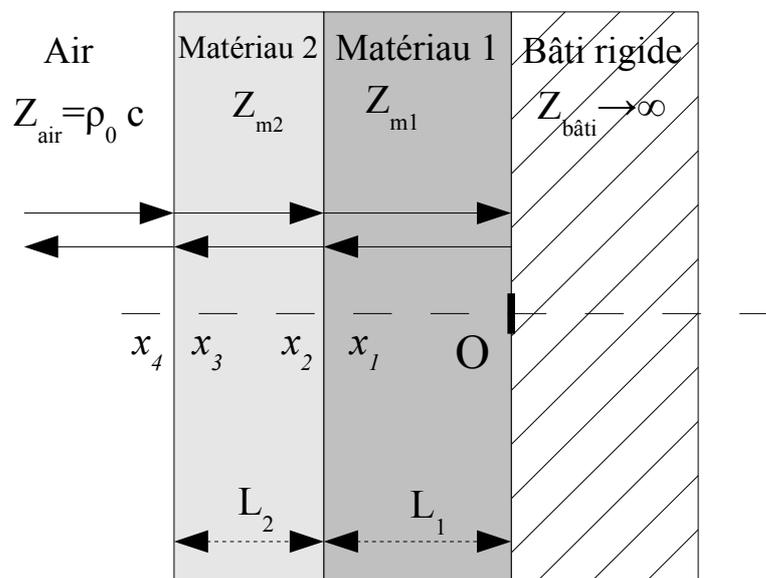
Remarquons que le diamètre de la fibre et la masse volumique ne sont pas des grandeurs totalement indépendantes. En toute logique, lorsque le rayon de la fibre augmente, la masse volumique augmente aussi.

Cependant, le diamètre des fibres étant généralement compris en 5 et 40 μm environ, c'est-à-dire difficile à évaluer, cette dernière relation présente assez peu d'intérêt pour celui incapable de mesurer le rayon de la fibre !

Enfin, signalons que la résistivité au passage de l'air d'une laine minérale dépend fortement de l'orientation des fibres vis-à-vis de l'onde incidente. Pour un usage courant, la fibre de la laine est le plus souvent orientée perpendiculairement au rayon acoustique. Si ce n'est pas le cas, par exemple en utilisant la laine sur la « tranche », il convient d'être prudent avec l'utilisation des droites d'ajustement affines présentées ci-dessus.

5) Coefficient d'absorption théorique d'un bicouche poreux dans le modèle « fluide équivalent » sous incidence normale

On reprend le problème précédent, avec les mêmes hypothèses, en superposant maintenant deux couches de matériau poreux.



Le coefficient d'absorption sous incidence normale α_n à l'interface air-matériau 2 s'écrit maintenant en fonction du coefficient de réflexion en pression $R_p(x_4)$:

$$\alpha_n = 1 - |R_p(x_4)|^2$$

On montrerait de la même manière que dans le paragraphe 3 que le coefficient de réflexion R_p à l'interface air-matériau 2 s'exprime en fonction de l'impédance acoustique spécifique exprimée en x_4 .

$$R_p = \frac{Z(x_4) - \rho_0 c}{Z(x_4) + \rho_0 c}$$

Il nous faut donc écrire $Z(x_4)$ en fonction des données du problème. Pour cela, formulons d'abord l'impédance acoustique spécifique en x_4 en fonction de celle en x_2 . Nous utilisons la formule de l'impédance ramenée (voir annexe C). Il vient, en supposant la continuité des impédances à l'interface air-matériau 2:

$$Z(x_4) = Z(x_3) = \frac{Z(x_2) + jZ_{m2} \tan(k_{m2} L_2)}{1 + j \frac{Z(x_2)}{Z_{m2}} \tan(k_{m2} L_2)} \quad (9)$$

Or, l'impédance acoustique spécifique en x_2 peut s'exprimer en fonction de celle connue en $x = 0$. En supposant toujours la continuité des impédances à l'interface des deux matériaux, on a :

$$Z(x_2) = Z(x_1) = \frac{Z(0) + jZ_{m1} \tan(k_{m1} L_1)}{1 + j \frac{Z(0)}{Z_{m1}} \tan(k_{m1} L_1)}$$

Le support étant infiniment rigide, on a :

$$Z(0) = Z_{\text{bâti}} \rightarrow \infty$$

d'où

$$Z(x_2) = Z(x_1) = -j \frac{Z_{m1}}{\tan(k_{m1} L_1)} = -j Z_{m1} \cotan(k_{m1} L_1)$$

En substituant $Z(x_2)$ par cette dernière expression dans (9), $Z(x_4)$ devient :

$$Z(x_4) = j \frac{\frac{-Z_{m1}}{\tan(k_{m1} L_1)} + Z_{m2} \tan(k_{m2} L_2)}{1 + \frac{Z_{m1} \tan(k_{m2} L_2)}{Z_{m2} \tan(k_{m1} L_1)}} \quad (10)$$

Remarquons qu'avec $L_2 = 0$ dans (10), cas correspondant à la situation absurde où le matériau 2 est inexistant, on retrouve bien l'expression de l'impédance acoustique spécifique d'une seule couche de matériau 1 déjà vue au paragraphe 3 :

$$Z(x_2) = -j \frac{Z_{m1}}{\tan(k_{m1} L)}$$

Au final :

$$R_p = \frac{j \frac{\frac{-Z_{m1}}{\tan(k_{m1} L_1)} + Z_{m2} \tan(k_{m2} L_2)}{1 + \frac{Z_{m1} \tan(k_{m2} L_2)}{Z_{m2} \tan(k_{m1} L_1)}} - \rho_0 c}{j \frac{\frac{-Z_{m1}}{\tan(k_{m1} L_1)} + Z_{m2} \tan(k_{m2} L_2)}{1 + \frac{Z_{m1} \tan(k_{m2} L_2)}{Z_{m2} \tan(k_{m1} L_1)}} + \rho_0 c}$$

Et par voie de conséquence :

$$\alpha_n = 1 - |R_p(x_4)|^2 = 1 - \left| \frac{j \frac{\frac{-Z_{m1}}{\tan(k_{m1} L_1)} + Z_{m2} \tan(k_{m2} L_2)}{1 + \frac{Z_{m1} \tan(k_{m2} L_2)}{Z_{m2} \tan(k_{m1} L_1)}} - \rho_0 c}{j \frac{\frac{-Z_{m1}}{\tan(k_{m1} L_1)} + Z_{m2} \tan(k_{m2} L_2)}{1 + \frac{Z_{m1} \tan(k_{m2} L_2)}{Z_{m2} \tan(k_{m1} L_1)}} + \rho_0 c} \right|^2$$

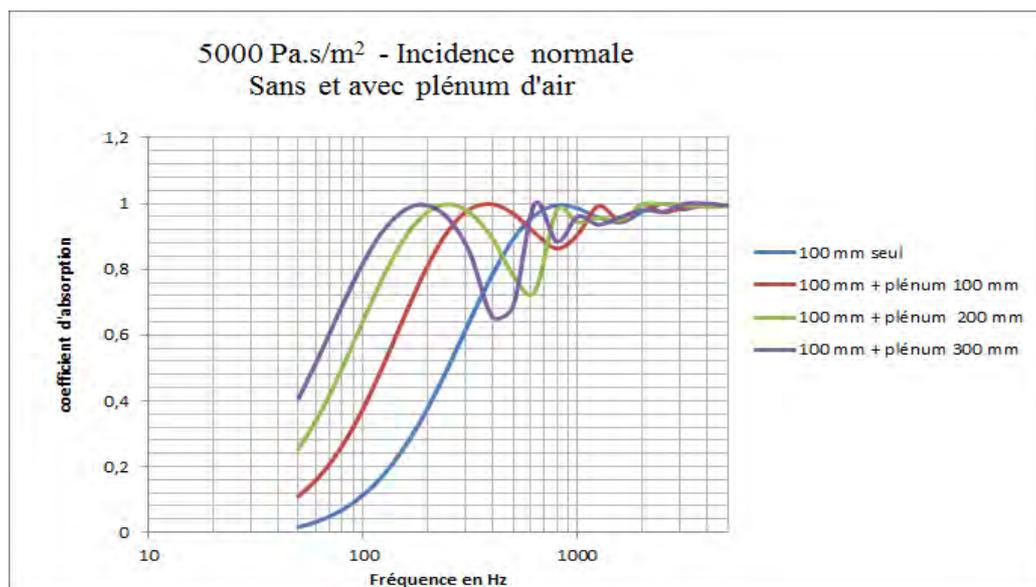
L'expression est un peu lourde ! Mais pour le calcul, on procédera évidemment par étapes successives ! Rappelons que Z_{m1} , Z_{m2} , k_{m1} et k_{m2} sont des quantités complexes qui découlent des formulations de **Delany & Bazley**. La méthode est, bien sûr, généralisable à trois, quatre ... couches de matériaux et qu'un calcul sous incidence quelconque est également possible.

Enfin, signalons le cas particulier où le matériau 1 correspond à un **plénum d'air**.

Dans ce cas $Z_{m1} = \rho_0 c$ et $k_{m1} = k$, et l'expressions (10) devient :

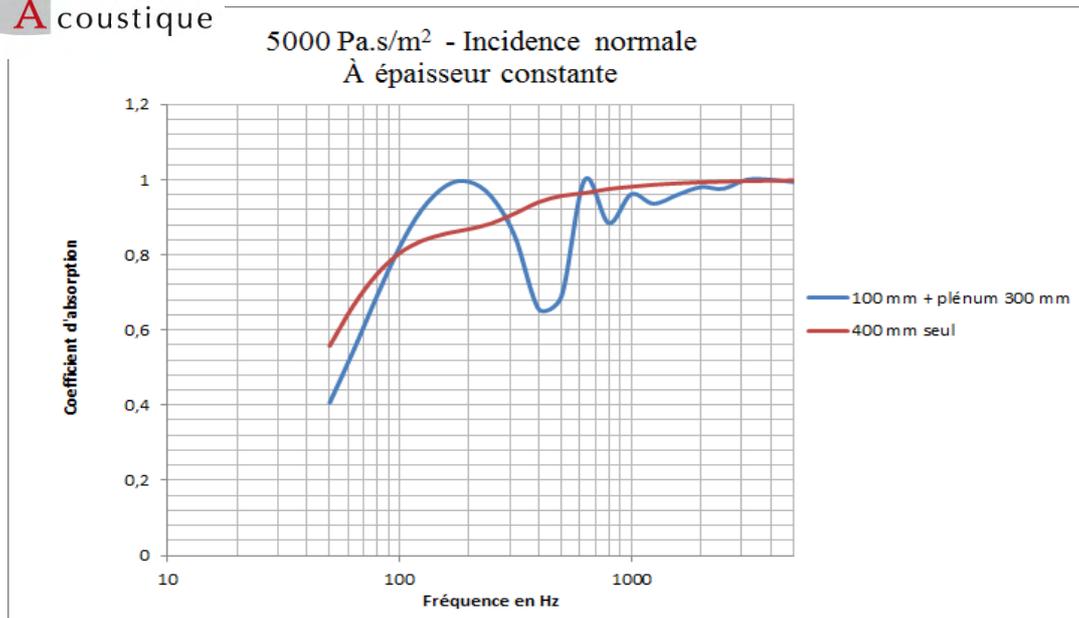
$$Z(x_4) = j \frac{\frac{-\rho_0 c}{\tan(k L_1)} + Z_{m2} \tan(k_{m2} L_2)}{1 + \frac{\rho_0 c \tan(k_{m2} L_2)}{Z_{m2} \tan(k L_1)}}$$

Le graphique ci-dessous montre l'effet du plénum d'air sous incidence normale sur la performance de l'absorption d'un matériau poreux :



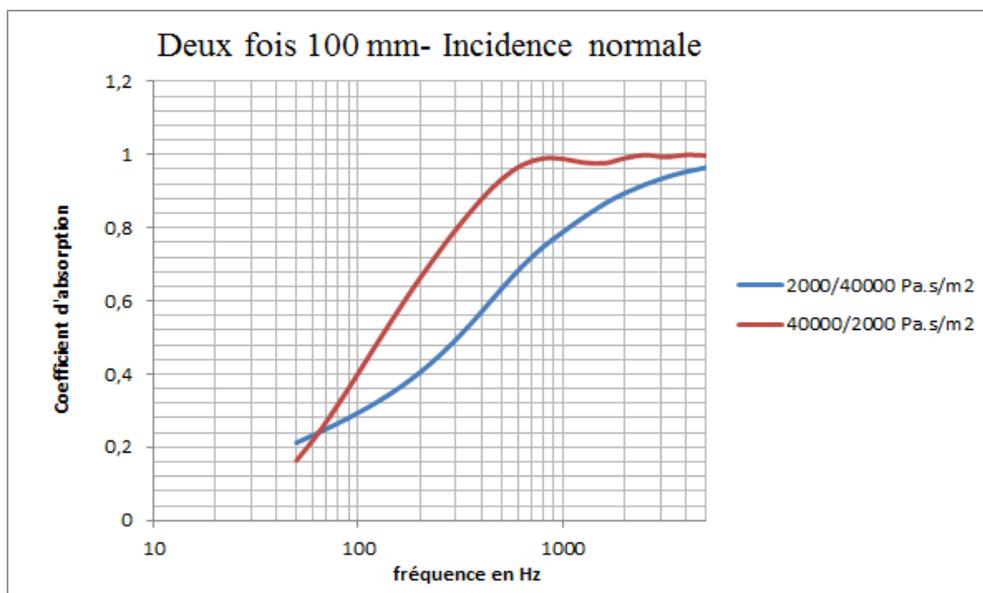
La lame d'air augmente toujours l'absorption dans les basses fréquences de façon spectaculaire. Cependant, il apparaît des creux qui dégradent l'efficacité du dispositif dans les fréquences médianes et cela est d'autant plus marqué que l'épaisseur du plénum est importante. Le premier maximum d'absorption correspond à la fréquence la plus basse qui donne un maximum de la vitesse particulière à l'interface air-matériau. A contrario, les creux indiquent des minimum de vitesse.

Le graphique suivant compare un dispositif à épaisseur constante, soit 400 mm d'un matériau poreux sans plénum avec un système constitué du même matériau de 100 mm d'épaisseur devant un plénum d'air de 300 mm.



Le matériau d'un seul tenant de 400 mm absorbe davantage dans les très basses fréquences mais avec un déficit d'absorption aux basses fréquences par rapport au dispositif avec plénum.

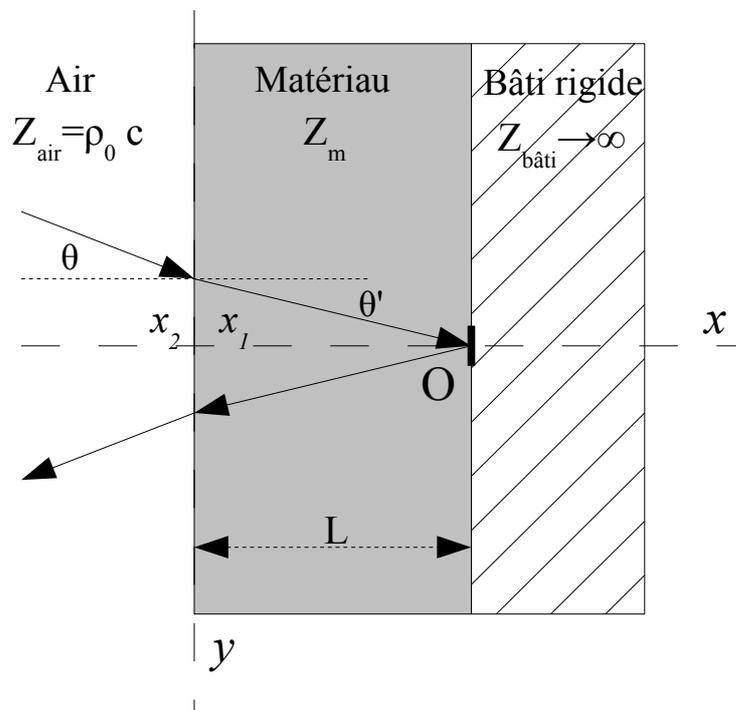
Dans le cas de la superposition de deux matériaux poreux d'égale épaisseur mais de résistivité au passage de l'air différente, on peut s'interroger sur l'influence de l'ordre des couches .



Les courbes montrent qu'il n'y a pas de réversibilité. Pour notre configuration, la performance est accrue lorsque le matériau de faible résistivité à l'écoulement de l'air est tourné vers l'extérieur, c'est-à-dire lorsqu'il reçoit la pression incidente en premier.

6) Coefficient d'absorption théorique d'un matériau poreux dans le modèle « fluide équivalent » sous incidence quelconque

On reprend le problème précédent mais dans le cas où l'onde incidente arrive sur l'interface air-matériau avec un angle d'incidence θ quelconque. On suppose le matériau isotrope, hypothèse forte notamment dans le cas des laines minérales où le sens des fibres a une incidence sur la résistivité à l'écoulement de l'air.



On utilise les lois de **Snell-Descartes** pour modéliser la réflexion contre le support rigide ainsi que la réfraction à l'interface air-matériau ou matériau-air.

Pour la réflexion sur le support rigide, l'angle d'incidence est égal à l'angle réfléchi et la réfraction à l'interface, est régie par la loi :

$$k \sin \theta = k_m \sin \theta'$$

Le vecteur d'onde dans le matériau dépend maintenant de deux composantes :

$$\vec{k}_m(k_{mx}; k_{my})$$

De même, dans l'air :

$$\vec{k}(k_x; k_y)$$

En utilisant le même raisonnement que sous incidence normale (paragraphe 3), nous pouvons exprimer l'impédance acoustique en x_2 en fonction de celle connue en $x = 0$. Pour cela, nous utilisons la formule de l'impédance ramenée en n'omettant pas que l'onde se propage dans le matériau suivant \vec{k}_m . L'impédance acoustique normale s'écrira alors :

$$Z(x_2) = Z(x_1) \approx -\frac{j}{\cos \theta'} \frac{Z_m}{\tan(k_{mx} L)}$$

Comme :

$$\cos \theta' = \frac{k_{mx}}{k_m}$$

il vient :

$$Z(x_2) \approx -j \frac{k_m}{k_{mx}} \frac{Z_m}{\tan(k_{mx} L)} \quad (11)$$

La pression dans l'air en un point quelconque de l'espace $(x; y)$, s'écrit encore une fois, comme la superposition de l'onde plane incidente et de l'onde réfléchie :

$$p(x; y; t) = A e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} + B e^{j(\omega t + k_x x - k_y y)} \quad \text{pour } x \leq -L$$

A et B étant les amplitudes complexes.

D'après l'équation d'Euler :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\Delta} p$$

la vitesse particulière dans l'air suivant x , notée $v_x(x; y; t)$, s'écrit en remarquant que $\frac{k_x}{k} = \cos \theta$:

$$v_x(x; y; t) = \cos \theta \frac{A e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} - B e^{j(\omega t + k_x x - k_y y)}}{\rho_0 c} \quad \text{pour } x \leq -L$$

L'impédance acoustique normale dans l'air peut s'écrire :

$$Z(x) = \frac{p(x; y; t)}{v_x(x; y; t)} = \frac{\rho_0 c}{\cos \theta} \left(\frac{Ae^{-jk_x x} + Be^{jk_x x}}{Ae^{-jk_x x} - Be^{jk_x x}} \right) \text{ pour } x \leq -L$$

En particulier, à l'interface air-matériau en $x_2 = -L$

$$Z(x_2) = \frac{p(x_2; t)}{v_x(x_2; t)} = \frac{\rho_0 c}{\cos \theta} \left(\frac{Ae^{jk_x L} + Be^{-jk_x L}}{Ae^{jk_x L} - Be^{-jk_x L}} \right)$$

En mettant $Ae^{j k L}$ en facteur au numérateur et au dénominateur, il vient aisément :

$$Z(x_2) = \frac{\rho_0 c}{\cos \theta} \left(\frac{1 + R_p}{1 - R_p} \right)$$

En retournant cette expression, on trouve le coefficient de réflexion en pression R_p

$$R_p = \frac{Z(x_2) - \frac{\rho_0 c}{\cos \theta}}{Z(x_2) + \frac{\rho_0 c}{\cos \theta}}$$

Soit encore en utilisant la relation (11)

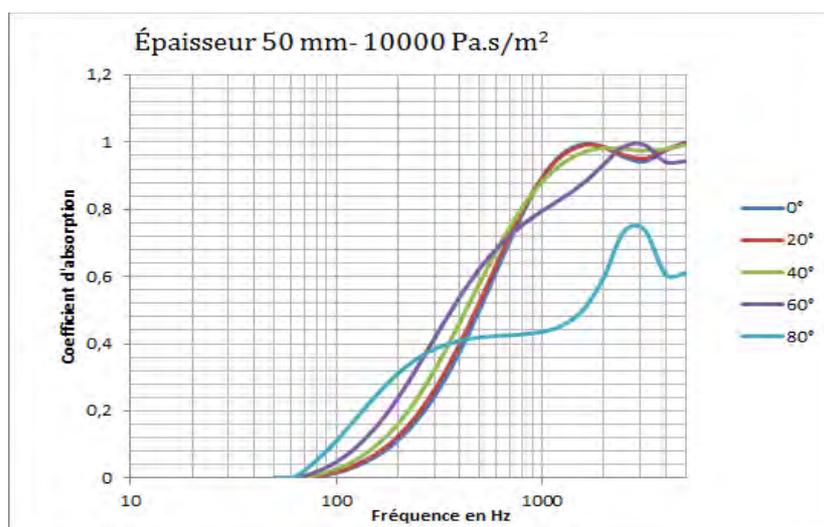
$$R_p = \frac{-j \frac{k_m}{k_{mx}} Z_m \cotan(k_{mx} L) - \frac{\rho_0 c}{\cos \theta}}{-j \frac{k_m}{k_{mx}} Z_m \cotan(k_{mx} L) - \frac{\rho_0 c}{\cos \theta}}$$

Au final, le coefficient d'absorption sous incidence quelconque s'écrit :

$$\alpha_\theta = 1 - \left| \frac{-j \frac{k_m}{k_{mx}} Z_m \cotan(k_{mx} L) - \frac{\rho_0 c}{\cos \theta}}{-j \frac{k_m}{k_{mx}} Z_m \cotan(k_{mx} L) - \frac{\rho_0 c}{\cos \theta}} \right|^2$$

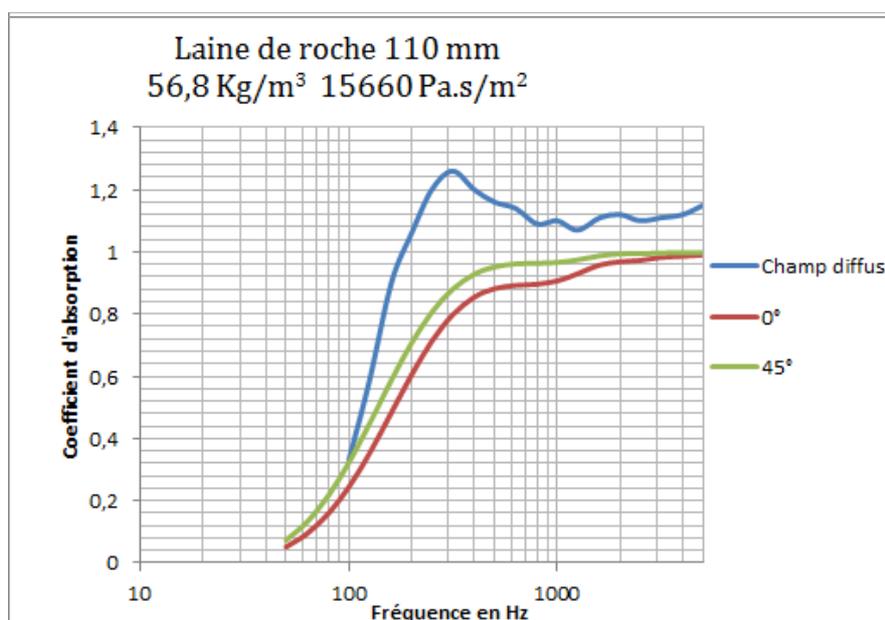
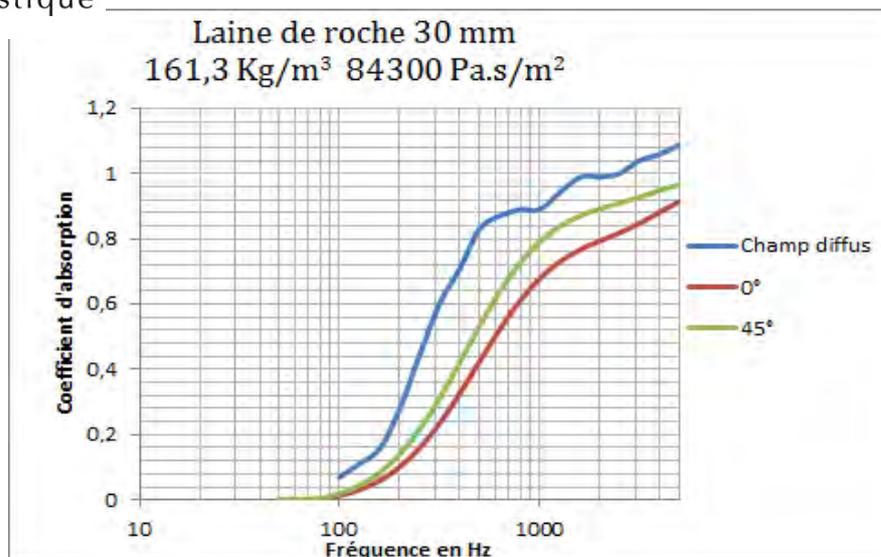
Z_m et k_m se déterminent encore une fois d'après les formulations de Delany & Bazley.

Le graphique figurant ci-dessous, indique le coefficient d'absorption α_θ , à épaisseur et résistivité constantes, pour plusieurs angles d'incidence.



On s'aperçoit que dans les basses fréquences, le coefficient d'absorption augmente avec l'angle d'incidence. Cependant, lorsque l'angle s'approche de l'incidence rasante à partir d'une certaine fréquence, la réflexion est accrue et l'absorption diminue.

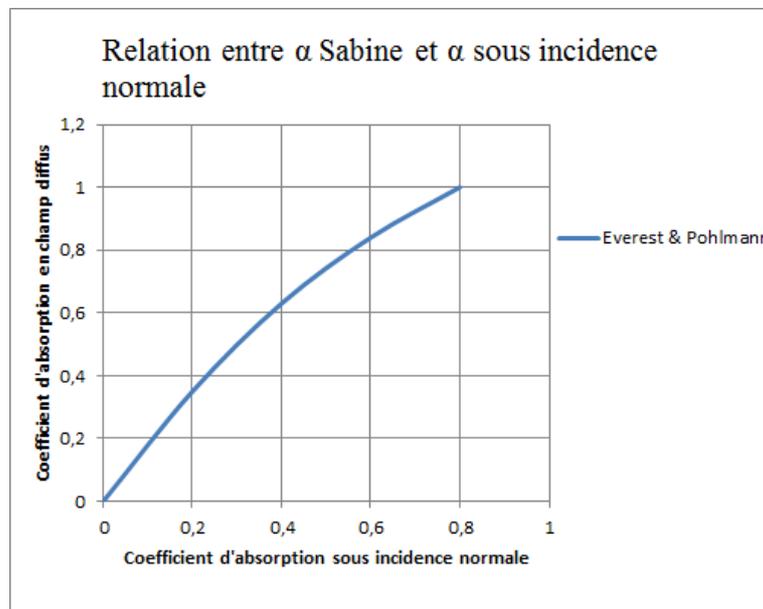
On compare dans les graphiques suivants, les coefficients d'absorption de Sabine mesurés en champ diffus avec les coefficients d'absorption issus du modèle de calcul théorique sous incidence normale et pour 45 °. Notons que la plupart des laines minérales ont un voile polyester ou de verre visible sur leur surface externe, ce qui peut perturber les prévisions des calculs théoriques. Toutefois, on a pris la précaution de choisir ici, trois laines minérales sans voile, c'est-à-dire satisfaisant au modèle calcul :



On relève que la mesure en champ diffus favorise l'absorption de la laine minérale par rapport au modèle théorique sous angle d'incidence. En pratique, cela signifie que faire usage d'un coefficient de Sabine en champ diffus pour évaluer l'atténuation d'une réflexion spéculaire ou la décroissance temporelle d'une onde stationnaire est incorrect. N'oublions pas, toutefois, que la mesure en chambre réverbérante « autorise » des alphas Sabine supérieurs à l'unité ce qui présente un avantage certain par rapport au modèle de calcul sous incidence quelconque !

7) Coefficient d'absorption sous incidence normale & coefficient d'absorption de Sabine en champ diffus

Il serait commode de pouvoir relier le coefficient d'absorption sous incidence normale α_n avec le coefficient d'absorption de Sabine α_s mesuré en champ diffus. **Everest & Pohlmann**, dans leur ouvrage *Master Handbook of Acoustics* indiquent le diagramme suivant :



On pourrait calculer un **coefficient d'absorption sous incidence statistique** α_{st} en faisant une moyenne spatiale du coefficient d'absorption sous incidence quelconque α_θ en faisant varier θ de 0 à π .

$$\alpha_{st} = \int_0^\pi \alpha_\theta(\theta) \sin(\theta) d\theta$$

avec

$$\alpha_\theta = 1 - \left| \frac{-j \frac{k_m}{k_{mx}} Z_m \cotan(k_{mx} L) - \frac{\rho_0 c}{\cos \theta}}{-j \frac{k_m}{k_{mx}} Z_m \cotan(k_{mx} L) - \frac{\rho_0 c}{\cos \theta}} \right|^2$$

Compte tenu de l'expression de α_θ , seule une intégration numérique est envisageable mais demande un peu de travail !

Morse & Ingard ont proposé une relation analytique simple permettant d'estimer le coefficient d'absorption statistique α_{st} d'après l'admittance spécifique réduite à l'interface air-matériau, notée β .

Où l'admittance spécifique réduite se déduit, dans le cas présent, de l'impédance $Z(x_2)$, par :

$$\beta = \frac{\rho_0 c}{Z(x_2)} = \cos(\theta) \frac{1 - R_p}{1 + R_p}$$

L'admittance étant une grandeur complexe, elle peut s'écrire en fonction de ses parties, réelle et imaginaire :

$$\beta = \beta_{\Re} + j\beta_{\Im}$$

Morse & Ingard suggèrent que coefficient d'absorption statistique α_{st} se calcule d'après:

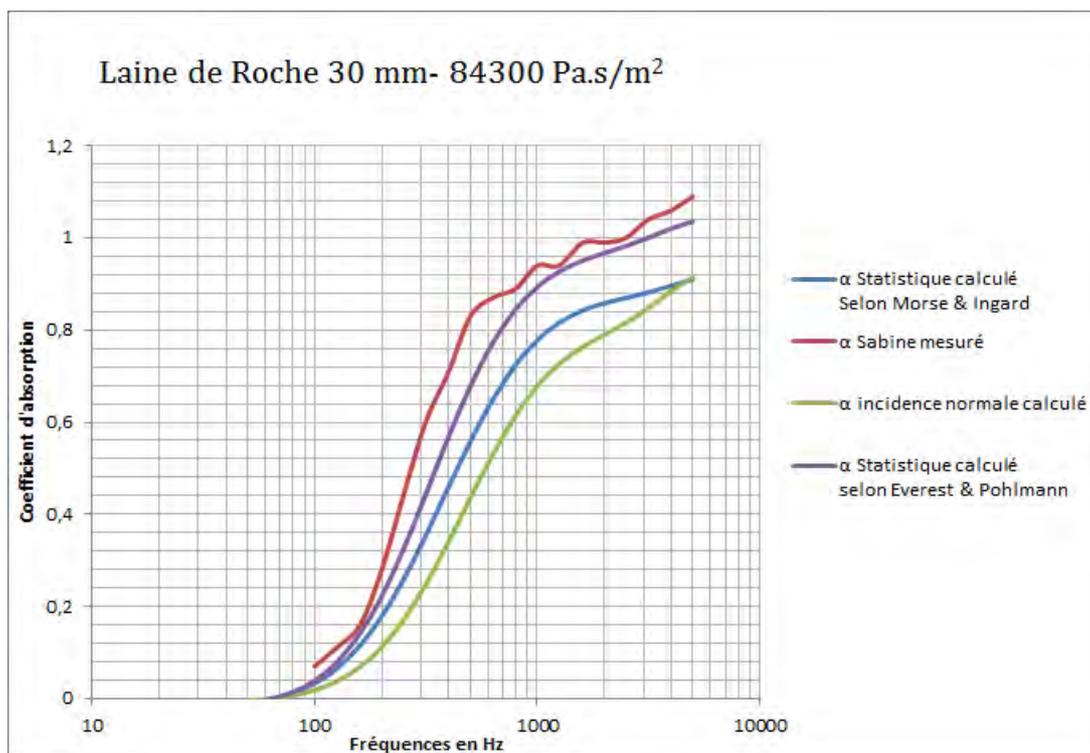
$$\alpha_{st} = 8\beta_{\Re} \left[1 + \frac{\beta_{\Re}^2 - \beta_{\Im}^2}{\beta_{\Im}} \tan^{-1} \left(\frac{\beta_{\Im}}{\beta_{\Re}^2 + \beta_{\Im}^2 + \beta_{\Re}} \right) - \beta_{\Re} \ln \left(\frac{(\beta_{\Re} + 1)^2 + \beta_{\Im}^2}{\beta_{\Re}^2 + \beta_{\Im}^2} \right) \right]$$

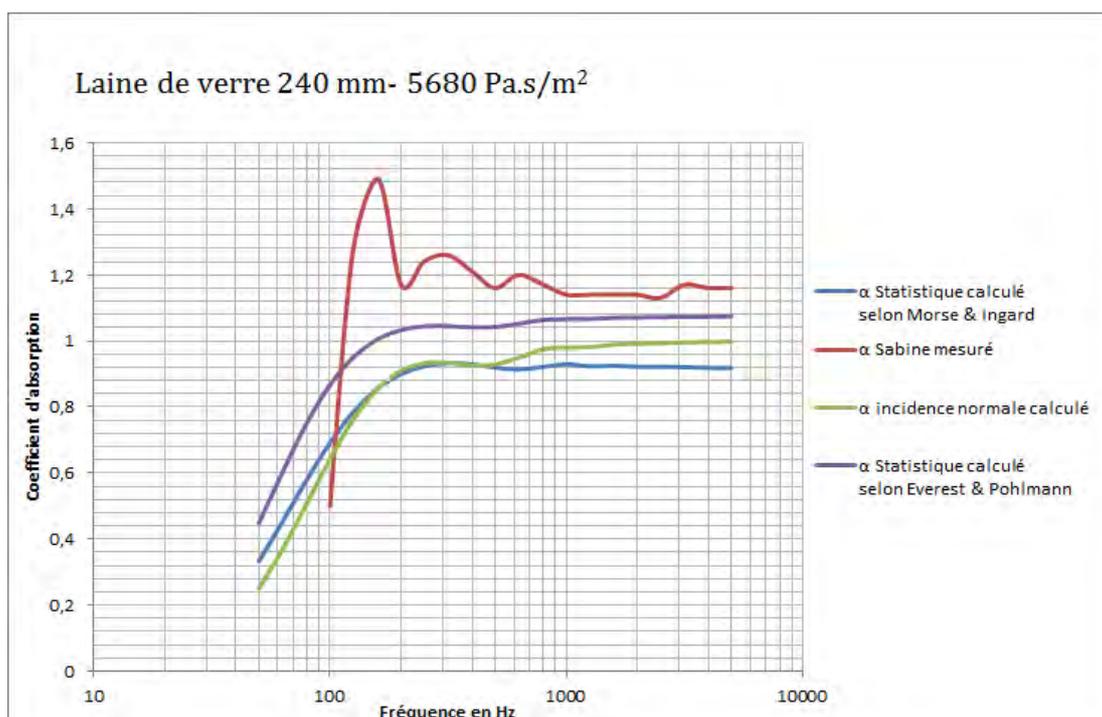
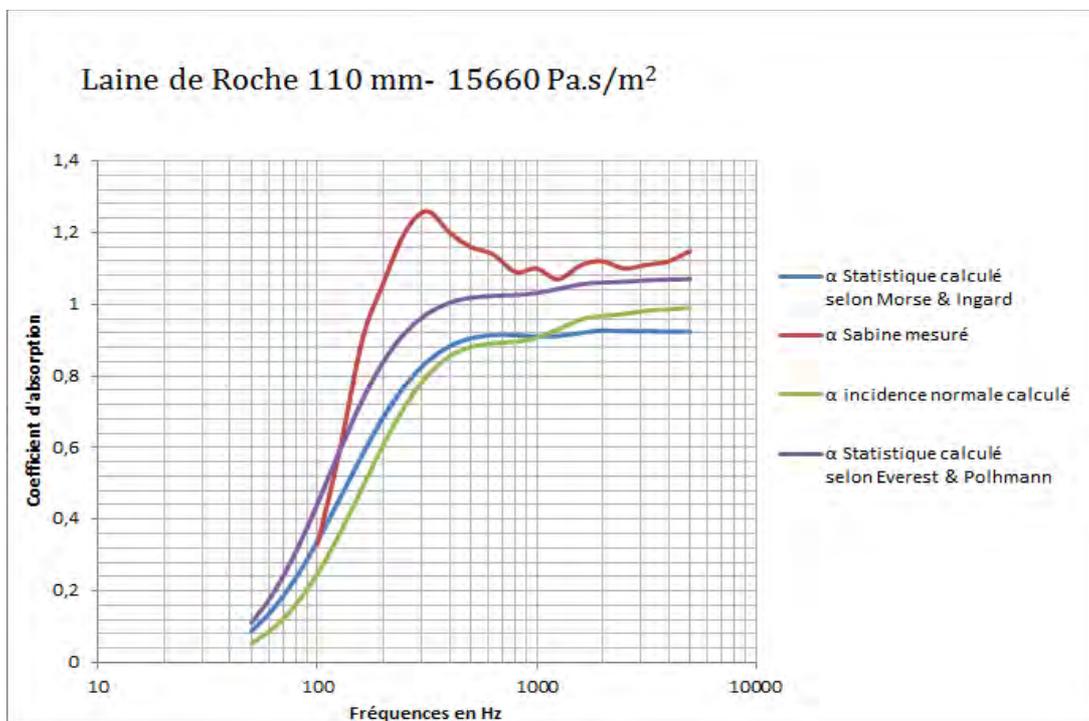
En pratique, on devrait pouvoir confondre le coefficient d'absorption statistique selon Morse & Ingard avec le coefficient d'absorption de Sabine mesuré en laboratoire d'essais. Cependant, les trois graphiques suivants, indiquent une corrélation assez vague entre les deux coefficients ! Mais gardons à l'esprit que la mesure en champ diffus « permet » un coefficient d'absorption de Sabine supérieur à l'unité, à cause notamment des effets de diffraction produits par les bords de l'échantillon. Cela fausse la comparaison avec le coefficient d'absorption statistique qui découle d'un modèle sans effets de bords !

Malgré tout, le coefficient d'absorption en champ diffus selon **Everest & Polhmann** indique une assez bonne correspondance avec les valeurs mesurées en laboratoire d'essais.

On pourra adopter :

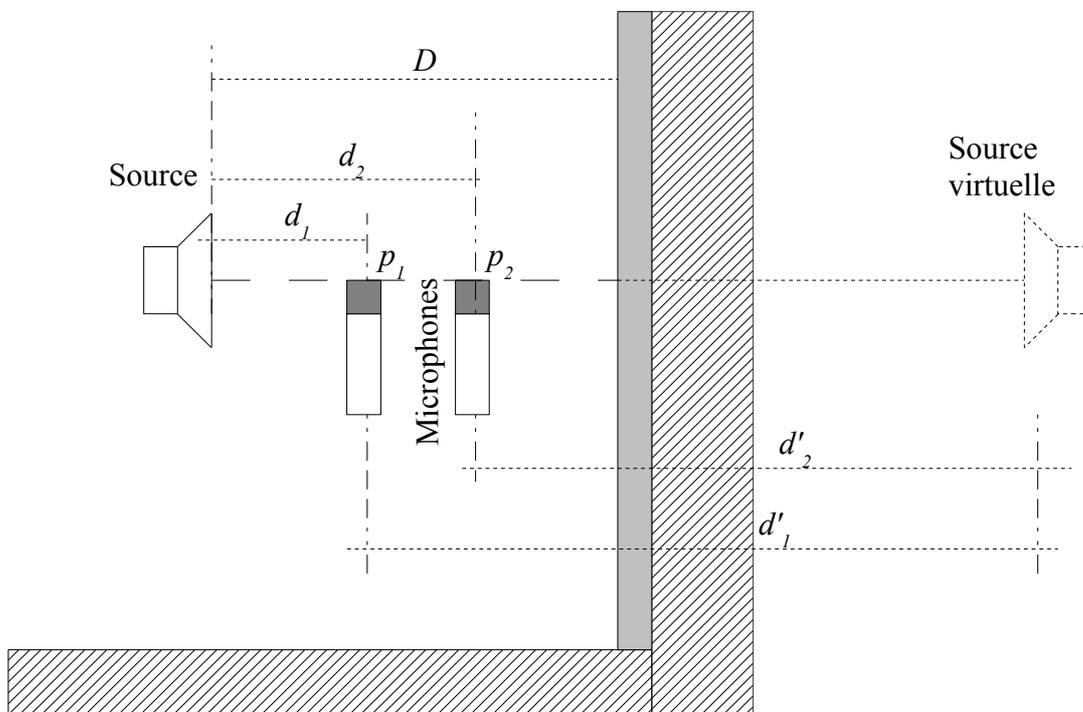
$$\alpha_{st} \approx 1,34 (1 - e^{-1,62 \alpha_n})$$





8) Coefficient d'absorption mesuré in situ par la méthode du doublet microphonique

Il est parfois nécessaire de mesurer l'absorption d'un matériau absorbant en situation dans une salle afin d'évaluer son pouvoir absorbant. Pour cela, il peut être fait usage de la méthode du doublet microphonique qui présente l'avantage d'être simple à mettre en place, surtout si l'on dispose de logiciel permettant de réduire la fenêtre temporelle de la réponse impulsionnelle pour écarter les artefacts produit par les réflexions sur les autres parois du local. Le dispositif, relatif à une mesure sous incidence normale, est le suivant :



Le haut-parleur doit être suffisamment proche de la paroi pour que l'onde reçue par le matériau soit sphérique (voir annexe B) et que la décroissance en $1/r$ de la pression soit significative aux points de mesure. Pour cela, il est aussi nécessaire que les microphones soit assez éloignés l'un de l'autre afin que la différence des pressions mesurées entre p_1 et p_2 soit suffisante.

La pression reçue par chaque microphone est la somme de la pression incidente et de la pression réfléchi, soit :

$$p_1 = \frac{e^{-j(kd_1 - \omega t)}}{d_1} + R_s \frac{e^{-j(kd'_1 - \omega t)}}{d'_1} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{e^{-j(kd_2 - \omega t)}}{d_2} + R_s \frac{e^{-j(kd'_2 - \omega t)}}{d'_2}$$

où R_s est le coefficient de réflexion en pression de l'onde sphérique.

Le rapport des deux pressions s'écrit :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{e^{-jkd_2}}{d_2} + R_s \frac{e^{-jkd'_2}}{d'_2}}{\frac{e^{-jkd_1}}{d_1} + R_s \frac{e^{-jkd'_1}}{d'_1}}$$

On retournant cette expression, on obtient R_s :

$$R_s = \frac{\frac{e^{-jkd_2}}{d_2} - \frac{p_2}{p_1} \frac{e^{-jkd_1}}{d_1}}{\frac{p_2}{p_1} \frac{e^{-jkd'_1}}{d'_1} - \frac{e^{-jkd'_2}}{d'_2}}$$

avec

$$d'_1 = 2D - d_1$$

$$d'_2 = 2D - d_2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 10^{\frac{(L_2 - L_1)}{20}}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Au final, le coefficient d'absorption en énergie vaut :

$$\alpha = 1 - |R_s|^2 = 1 - \left| \frac{\frac{e^{-jkd_2}}{d_2} - \frac{p_2}{p_1} \frac{e^{-jkd_1}}{d_1}}{\frac{p_2}{p_1} \frac{e^{-jkd'_1}}{d'_1} - \frac{e^{-jkd'_2}}{d'_2}} \right|^2$$

Notons que cette relation est une approximation ne prenant pas en compte les réfractions ayant lieu à l'intérieur de la couche poreuse. En effet, le coefficient de réflexion a été défini implicitement par :

$$R_s = \frac{B}{A}$$

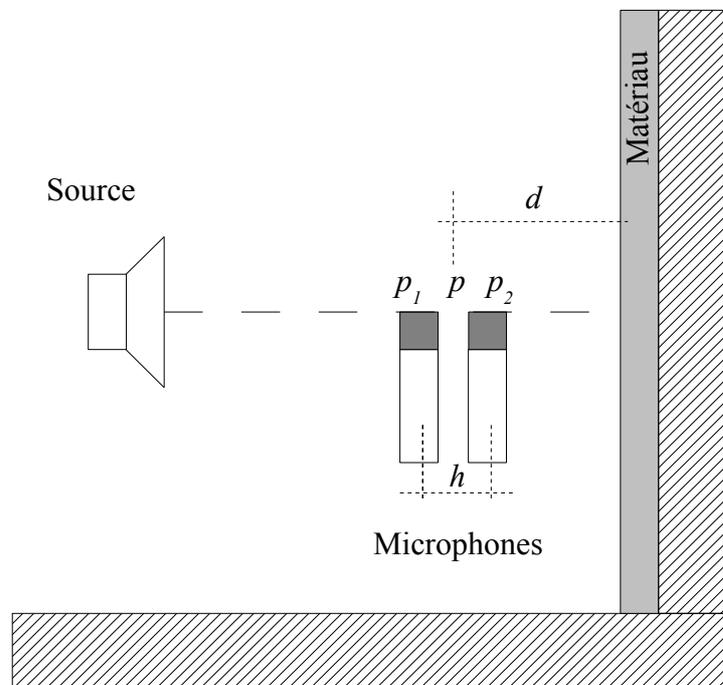
Où A et B sont les amplitudes complexes respectivement de la pression incidente et réfléchie.

De plus, le coefficient de réflexion en pression R_s , est ici confondu avec celui d'une onde plane alors que l'onde incidente est plutôt sphérique. Cela suppose que l'onde sphérique se réfléchit selon les lois de **Snell-Descartes**, hypothèse assez forte notamment en dehors de l'incidence normale !

En pratique, il peut être fait usage d'un seul microphone au lieu de deux, que l'on déplace. Cela évite notamment des problèmes d'appariage et de calibration entre les deux cellules microphoniques. Remarquons que la méthode est inchangée avec un angle d'incidence quelconque.

9) Mesure du coefficient d'absorption par la méthode du doublet microphonique d'Allard & Sieben

La méthode d'**Allard & Sieben** ressemble au dispositif précédent avec cette différence que les cellules sont maintenant proches l'une de l'autre afin de constituer une sorte de sonde intensimétrique. La méthode est initialement valide en chambre anéchoïde, néanmoins avec les possibilités d'analyse en temps réel et la réduction du fenêtrage temporel qu'offrent de nombreux logiciels « audios », elle peut également être mise en œuvre in situ, au moins pour les fréquences médiums et aiguës. Cependant, il faudra pouvoir disposer d'une paire de microphones appariés ou étalonnés l'un par rapport à l'autre, et d'une très bonne résolution.



Le doublet microphonique est placé à proximité de la surface de l'échantillon à tester. On suppose que la distance h entre les deux microphones est petite devant les longueurs d'ondes rayonnées par la source sonore ($h \ll \lambda$). On se place dans l'approximation onde plane, ce qui signifie que le haut-parleur est suffisamment éloigné de la paroi c'est-à-dire à 0,80 m environ pour une région fréquentielle supérieure à 200 Hz (voir annexe B).

Comme h est petit, la pression médiane entre les deux microphones se déduit de la moyenne des deux pressions mesurées par les cellules :

$$p \approx \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (12)$$

L'équation d'Euler (encore une fois!) :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

permet d'exprimer la vitesse particulaire médiane entre les deux microphones, en effet :

$$j\omega\rho_0 v \approx \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

$$j\omega\rho_0 v \approx \frac{p_1 - p_2}{h}$$

d'où

$$v \approx \frac{p_1 - p_2}{j\omega\rho_0 h} \quad (13)$$

Notons $H(\omega)$ la fonction de transfert en pression :

$$H(\omega) = \frac{p_2}{p_1}$$

Nous pouvons exprimer la pression p et la vitesse particulaire médiane v en fonction de p_1 et $H(\omega)$, les expressions (12) et (13) deviennent :

$$p = \frac{1 + H(\omega)}{2} p_1$$

$$v = \frac{1 - H(\omega)}{j\omega\rho_0 h} p_1$$

L'impédance acoustique spécifique de l'onde Z entre les deux microphones s'écrit alors :

$$Z = \frac{p}{v} = \frac{j\omega\rho_0 h (1 + H(\omega))}{2(1 - H(\omega))} \quad (14)$$

En utilisant la formule de l'impédance ramenée, nous pouvons écrire l'impédance de surface du matériau, noté Z_s , en fonction de Z et de d :

$$Z_s = \frac{Z + j\rho_0 c \tan(kd)}{1 + j \frac{Z}{\rho_0 c} \tan(kd)}$$

Après substitution de Z par son expression (14) et réarrangement, il vient :

$$Z_s = j\rho_0 c \frac{kh[1+H(\omega)] + 2[1-H(\omega)]\tan(kd)}{2[1-H(\omega)] - kh[1+H(\omega)]\tan(kd)} \quad (15)$$

En procédant de la même façon que dans le paragraphe 3, on montrerait que le coefficient de réflexion en pression R_p vaut :

$$R_p = \frac{Z_s - \rho_0 c}{Z_s + \rho_0 c}$$

Soit encore en introduisant (15) et avec $H=H(\omega)$ pour alléger l'écriture :

$$R_p = \frac{j[kh(1+H) + 2(1-H)\tan(kd)] - 2(1-H) + kd(1+H)\tan(kd)}{j[kh(1+H) + 2(1-H)\tan(kd)] + 2(1-H) - kd(1+H)\tan(kd)}$$

et le coefficient d'absorption en énergie :

$$\alpha = 1 - |R_p|^2$$

$$\alpha = 1 - \left| \frac{j[kh(1+H) + 2(1-H)\tan(kd)] - 2(1-H) + kd(1+H)\tan(kd)}{j[kh(1+H) + 2(1-H)\tan(kd)] + 2(1-H) - kd(1+H)\tan(kd)} \right|^2$$

ANNEXE A : Résistivité au passage de l'air σ

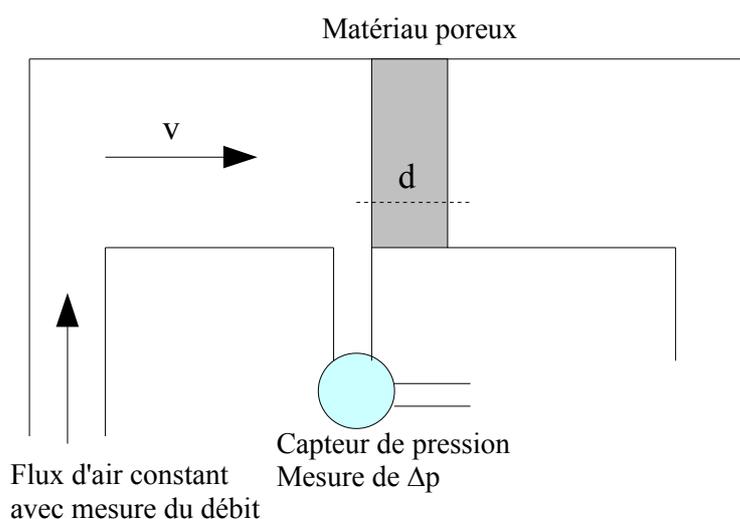
Autant préciser d'emblée qu'il existe une ambiguïté sémantique entre le terme de **résistivité** et celui de **résistance**. L'acousticien et auteur français, Jacques Jouhaneau, désigne la résistance au passage de l'air comme étant une **résistance acoustique spécifique par unité de longueur**. Alors que Trévor J.Cox, un universitaire et auteur anglophone, évoque plutôt la résistivité au passage de l'air. Une résistivité est effectivement une résistance par unité de longueur. Néanmoins, pour éviter toute confusion dans les formulations de **Delany & Bazley**, il est préférable de se fier aux unités plutôt qu'aux terminologies des grandeurs. La résistivité au passage de l'air σ qui doit être introduite dans le modèle de Delany & Bazley s'exprime en **N.s.m⁻⁴** ou en **Rayls.m⁻¹**, unité anglo-saxonne.

Le Rayl (Lord Rayleigh) est l'unité de l'impédance acoustique dans le système MKS:

$$1 \text{ Rayl} = 1 \text{ N.s / m}^3 = 1 \text{ Pa.s/m}$$

Dans cet exposé, on a préféré employer le **Pa.s/m²** pour unité de la résistivité au passage de l'air σ pour coller à la définition de la grandeur et utiliser le terme de résistivité.

Ceci étant, la résistivité au passage de l'air se mesure à l'aide de capteurs de pression statique et d'un débitmètre. La méthodologie de mesurages est décrite dans la norme NF EN 29053. Le schéma de principe est le suivant :



La résistivité à l'écoulement de l'air σ , exprimée en Pa.s/m², se déduit des mesures d'après la relation

suivante:

$$\sigma = \frac{\Delta p}{v d}$$

où

- Δp est la différence de pression de part et d'autre de l'échantillon, exprimée en Pa.
- v est la vitesse de l'air, exprimée en m/s.
- d est l'épaisseur de l'échantillon, exprimée en m.

On définit également la résistance à l'écoulement de l'air R , exprimée en Pa.s/m³:

$$R = \frac{\Delta p}{q_v} \quad (\text{analogie électrique en pression/débit})$$

Où q_v est le débit volumique, exprimé en m³/s

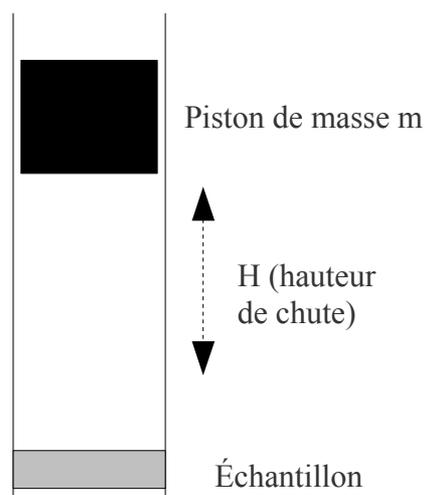
Ainsi que la résistance spécifique à l'écoulement de l'air R_s , exprimée en Pa.s/m :

$$R_s = R.S = \frac{\Delta p}{v} = \sigma.d \quad (\text{analogie électrique en pression/vitesse})$$

Où S est l'aire de la surface de l'échantillon, exprimée en m².

Il vaut mieux ne pas se « mélanger les pinceaux » !!!

Pour la mesure de la résistivité à l'écoulement de l'air, **Trevor J.Cox & Peter D'Antonio**, dans *Acoustic Absorbers and Diffusers* indique une méthode alternative qui ne nécessite pas de matériels de laboratoire importants. Il s'agit d'utiliser un piston de masse m (1 kg environ) coulissant dans un tube vertical (ou incliné) d'une longueur d'un mètre pour un diamètre d'un décimètre environ.



La différence de pression Δp est donnée simplement par :

$$\Delta p = \frac{mg}{S_p}$$

Où S_p est l'aire du piston.

La vitesse de l'air v se déduit de celle de la vitesse de la chute du piston v_p que l'on mesurera par chronométrage t sur la hauteur H :

$$v = \frac{S_p}{S_m} v_p$$

Où S_m est l'aire de la surface de l'échantillon.

Néanmoins, pour tenir compte des fuites d'air entre le piston et le tube ainsi que des pertes par frottements, la méthode n'est strictement valide que si l'on effectue deux étalonnages avec mesures des temps de chute dans deux situations particulières :

- L'une correspondante au temps de chute t_0 sans l'échantillon et avec les deux extrémités du tube ouvertes.
- L'autre correspondant au temps de chute t_1 sans l'échantillon et avec le fond du tube fermé.

Le temps de chute en présence de l'échantillon étant noté t , le terme correctif C est donné par :

$$C = \frac{1 - \frac{t_0}{t}}{1 - \frac{t_1}{t}}$$

Tout compte fait, la résistivité au passage de l'air est donnée par la relation :

$$\sigma = \frac{C mg S_s t}{H S_p^2}$$

Dans le cas où le tube est incliné d'un angle ψ par rapport à la verticale, cette dernière relation devient :

$$\sigma = \frac{C mg \cos(\psi) S_s t}{H S_p^2}$$

ANNEXE B : Approximation onde plane

Pour une **onde plane** progressive, la relation entre la pression p et la vitesse particulaire v est :

$$p = \rho_0 c v$$

Pression et la vitesse sont en phase et $\cos \varphi = 1$.

Pour une **onde sphérique** divergente, la relation entre la pression p et la vitesse particulaire v est :

$$p = \rho_0 c v \frac{kr}{\sqrt{1+k^2 r^2}}$$

$$\text{avec } \cos \varphi = \frac{kr}{\sqrt{1+k^2 r^2}}$$

où r est la distance à la source et k le nombre d'onde.

Si $kr \rightarrow \infty$ alors $\cos \varphi \approx 1$, pression et vitesse sont en phase.

En pratique, au-delà d'une certaine distance de la source sonore, pour une fréquence donnée, une onde sphérique peut être approximée par une onde plane si la pression et la vitesse sont quasiment en phase. On considère habituellement que cela est réalisé lorsque :

$$\cos^2 \varphi > 0,9$$

c'est-à-dire si

$$\frac{k^2 r^2}{1+k^2 r^2} > 0,9$$

ce qui impose

$$kr > 3$$

L'approximation onde plane est réalisée si $r > \frac{3c}{2\pi f}$

- à 100 Hz si $r > 1,6$ m
- à 200 Hz si $r > 0,8$ m
- à 400 Hz si $r > 0,4$ m

ANNEXE C : Impédance ramenée

Considérons une onde plane monochromatique se propageant sur une dimension de l'espace, suivant x , dans les deux sens, par exemple dans un conduit cylindrique infini de section constante.

L'expression de sa pression s'écrit :

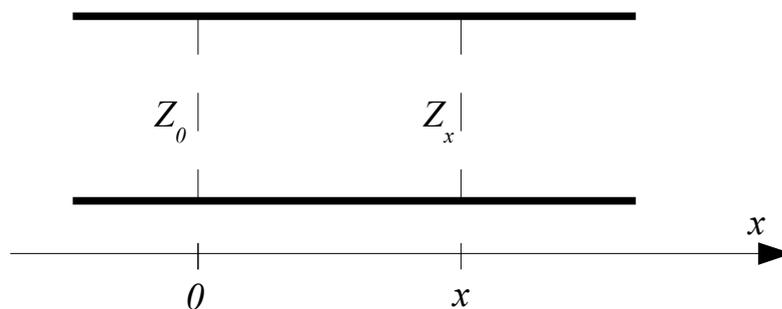
$$p(x; t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}$$

où $Ae^{j(\omega t - kx)}$ représente l'onde se propageant dans le sens des x croissants
et $Be^{j(\omega t + kx)}$ représente l'onde se propageant dans le sens des x décroissants

Remarquons que la pression pourrait s'écrire également sous une forme réelle :

$$p(x; t) = C \cos(\omega t - kx) + D \sin(\omega t + kx)$$

Cependant, il est plus aisé de travailler avec l'expression en exponentielle complexes.



La relation d'Euler, à une dimension, permet d'exprimer la vitesse particulière de l'onde :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

En régime harmonique, remarquons que :

- dérivé par rapport au temps t revient à multiplier la grandeur par le terme $j\omega$
- intégré par rapport à x revient à diviser la grandeur par terme jk

Ainsi il vient avec $k = \frac{\omega}{c}$:

$$v(x; t) = \frac{Ae^{j(\omega t - kx)} - Be^{j(\omega t + kx)}}{\rho_0 c}$$

L'impédance acoustique **spécifique** de l'onde, notée $Z(x)$, vaut par définition :

$$Z(x) = \frac{p(x; t)}{v(x; t)} = \rho_0 c \frac{Ae^{-jkx} + Be^{jkx}}{Ae^{-jkx} - Be^{jkx}}$$

L'impédance acoustique spécifique **réduite**, notée z_x , est définie par :

$$z_x = \frac{Z(x)}{\rho_0 c} = \frac{Ae^{-jkx} + Be^{jkx}}{Ae^{-jkx} - Be^{jkx}}$$

En particulier en $x = 0$, on a :

$$z_0 = \frac{A+B}{A-B}$$

comme

$$e^{jkx} = \cos(kx) + j \sin(kx)$$

l'expression z_x peut s'écrire également :

$$z_x = \frac{A(\cos(kx) - j \sin(kx)) + B(\cos(kx) + j \sin(kx))}{A(\cos(kx) - j \sin(kx)) - B(\cos(kx) + j \sin(kx))}$$

après réarrangement

$$z_x = \frac{(A+B)\cos(kx) - j(A-B)\sin(kx)}{(A-B)\cos(kx) - j(A+B)\sin(kx)}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur de cette dernière expression par $A-B$, on fait apparaître le terme z_0 :

$$z_x = \frac{z_0 \cos(kx) - j \sin(kx)}{\cos(kx) - j z_0 \sin(kx)}$$

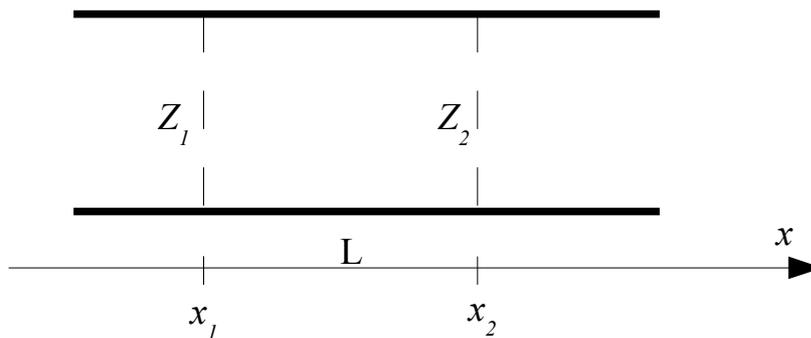
Soit encore en divisant de nouveau le numérateur et le dénominateur par $\cos(kx)$:

$$z_x = \frac{z_0 - j \tan(kx)}{1 - jz_0 \tan(kx)}$$

En inversant les indices x et 0 , et en n'omettant pas que le signe de $\tan(kx)$ change, on obtient :

$$z_0 = \frac{z_x + j \tan(kx)}{1 + jz_x \tan(kx)}$$

Maintenant, par changement d'indice, en affectant l'indice 1 à 0 et celui de 2 à x ,



il vient, en posant $L = x_2 - x_1$:

$$z_1 = \frac{z_2 + j \tan(kL)}{1 + jz_2 \tan(kL)}$$

Ainsi l'impédance en un point x_1 du conduit peut se déterminer à partir de celle connue en x_2

Avec

$$z_1 = \frac{Z_1}{\rho_0 c} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{Z_2}{\rho_0 c}$$

Il vient également :

$$Z_1 = \frac{Z_2 + j\rho_0 c \tan(kL)}{1 + j \frac{Z_2}{\rho_0 c} \tan(kL)}$$

On dit que Z_1 est l'impédance ramenée de Z_2 par la longueur $L = x_2 - x_1$

Notons que si l'onde se propage dans un fluide quelconque d'impédance acoustique **caractéristique** $Z_m = \rho_m c_m$, cette dernière relation s'écrit :

$$Z_1 = \frac{Z_2 + jZ_m \tan(k_m L)}{1 + j \frac{Z_2}{Z_m} \tan(k_m L)}$$

ANNEXE D : Tangente d'un nombre complexe ???

Dans un milieu dissipatif, au cours de sa propagation une onde plane doit voir son amplitude diminuer. Avec un nombre d'onde complexe, en posant par exemple $k_m = a + jb$, il vient dans l'expression de la pression :

$$p(x; t) = Ae^{-j(\omega t - k_m x)} = Ae^{j(a + jb)x} e^{-j\omega t} = Ae^{-j(\omega t - ax)} e^{-bx}$$

L'atténuation de la pression lors de sa propagation est donc donnée par le terme réel e^{-bx} qui décroît en fonction de x . C'est la composante imaginaire b du nombre d'onde qui caractérise l'atténuation, appelée aussi **coefficient d'atténuation** de l'onde propagée. Il est donc absolument nécessaire que dans un milieu dissipatif le nombre d'onde soit complexe comme le formulent **Delany & Bazley**.

Cela étant dit, le calcul de $\tan(k_m L)$ figurant dans l'expression du coefficient d'absorption mérite quelques précisions car déterminer la tangente d'un nombre complexe peut paraître, au premier abord, surprenant !

Néanmoins, en introduisant les formules d'Euler :

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

puis en exprimant e^{jz} et e^{-jz} en fonction des parties réelle et imaginaire ($z = a + jb$)

$$e^{jz} = e^{ja - b} = e^{-b}(\cos a + j \sin a)$$

$$e^{-jz} = e^{-ja + b} = e^b(\cos a - j \sin a)$$

il vient :

$$2 \cos(z) = e^{jz} + e^{-jz} = e^{-b}(\cos a + j \sin a) + e^b(\cos a - j \sin a) = \cos a(e^{-b} + e^b) - j \sin a(e^b - e^{-b})$$

$$2j \sin(z) = e^{jz} - e^{-jz} = e^{-b}(\cos a + j \sin a) - e^b(\cos a - j \sin a) = \cos a(e^{-b} - e^b) + j \sin a(e^b + e^{-b})$$

Rappelons les formules du cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On a donc :

$$2 \cos z = 2 \cos(a) \operatorname{ch}(b) - 2j \sin(a) \operatorname{sh}(b)$$

$$2j \sin z = -2 \cos(a) \operatorname{sh}(b) + 2j \sin(a) \operatorname{ch}(b)$$

Au final :

$$\cos(a + jb) = \cos(a) \operatorname{ch}(b) - j \sin(a) \operatorname{sh}(b)$$

$$\sin(a + jb) = \sin(a) \operatorname{ch}(b) + j \cos(a) \operatorname{sh}(b)$$

$$\tan(a + jb) = \frac{\sin(a) \operatorname{ch}(b) + j \cos(a) \operatorname{sh}(b)}{\cos(a) \operatorname{ch}(b) - j \sin(a) \operatorname{sh}(b)}$$

La tangente d'un nombre complexe est donc un nombre complexe !

ANNEXE E : Z_m et k_m selon Miki et Mechel & Grundmann

- Modèle de **Miki** (1990)

Dans les basses fréquences, le modèle de Delany & Bazley indique parfois un coefficient d'absorption négatif ! Évidemment, ça n'a pas de sens physique ! Pour remédier à cette anomalie **Miki** suggère d'utiliser les formulations suivantes :

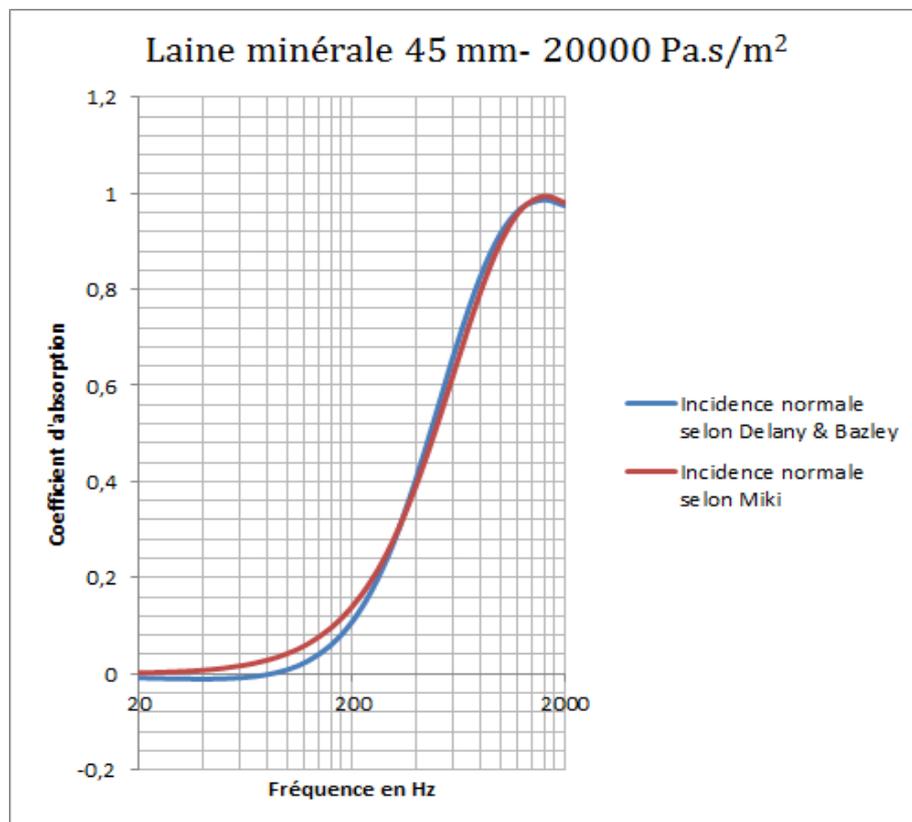
Pour l'impédance acoustique caractéristique :

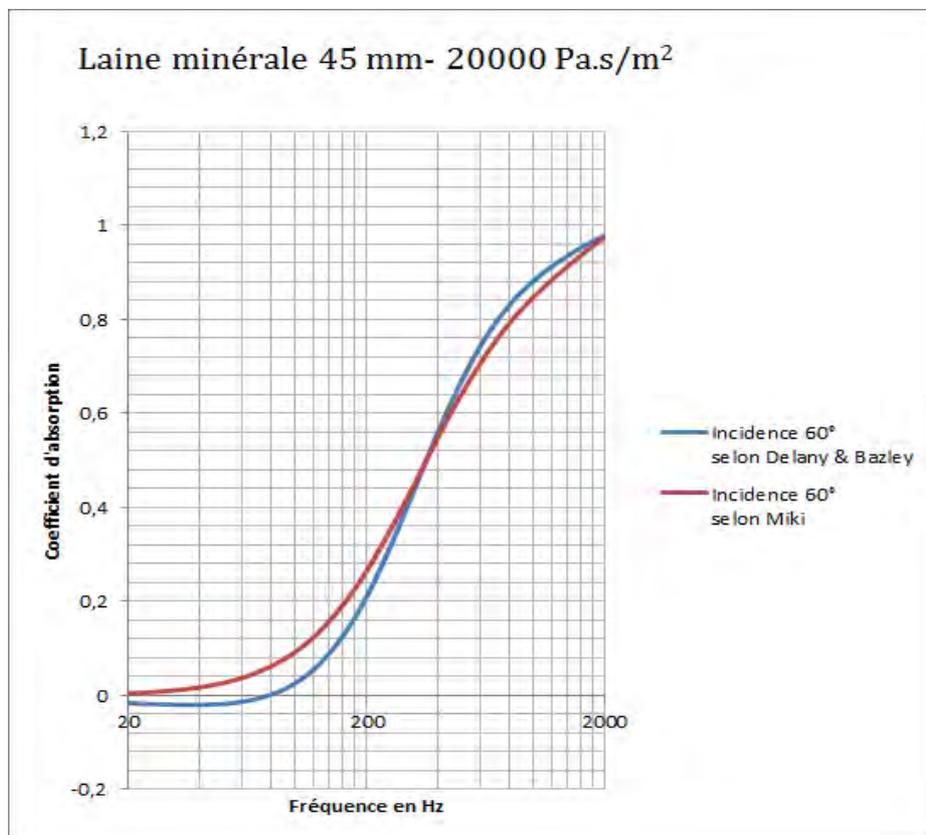
$$Z_m = \rho_0 c \left(1 + 0,0699 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,632} - 0,1071 j \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,632} \right)$$

et le nombre d'onde :

$$k_m = \frac{\omega}{c} \left(1 + 0,1093 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,618} - 0,1597 j \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,618} \right)$$

Les conditions de validité sont les mêmes que celle de Delany & Bazley, c'est-à-dire une porosité proche de 1, une résistivité à l'écoulement de l'air σ comprise entre 1000 et 50000 Pa.s/m² et une quantité $\rho_0 \frac{f}{\sigma}$ comprise entre 0,01 et 1.





Que ce soit avec le modèle de Miki ou celui de Delany & Bazley (Allard & Champoux en réalité) la limite de validité, avec un matériau dont la résistivité au passage de l'air est de 20000 Pa.s/m², commence à 160 Hz. En deçà de cette fréquence critique, on observe parfois que le calcul selon Delany & Bazley donne des coefficients d'absorption négatifs. Mais cela ne signifie pas que les calculs menés d'après les relations proposées par Miki soient forcément plus exacts. Ils sont justes plus cohérents avec la physique.

- Modèle **Mechel & Grundmann (1995)**

Sans doute plus intéressant, **Mechel & Grundmann** proposent des expressions de formes différentes, pour exprimer le nombre d'onde k_m et l'impédance caractéristique Z_m , toujours en fonction de la résistivité à l'écoulement de l'air σ . Le modèle de **Mechel & Grundmann** peut être utilisé bas en fréquence, ce qui lui confère un intérêt certain.

Pour l'impédance acoustique caractéristique :

$$Z_m = \rho_0 c \left[a_1 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-1} + b_1 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,5} + c_1 + d_1 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{0,5} + e_1 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^1 + f_1 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{1,5} \right]$$

et le nombre d'onde :

$$k_m = j \frac{\omega}{c} \left[a_2 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-1} + b_2 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{-0,5} + c_2 + d_2 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{0,5} + e_2 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^1 + f_2 \left(\rho_0 \frac{f}{\sigma} \right)^{1,5} \right]$$

Ces relations sont valides pour des matériaux ayant :

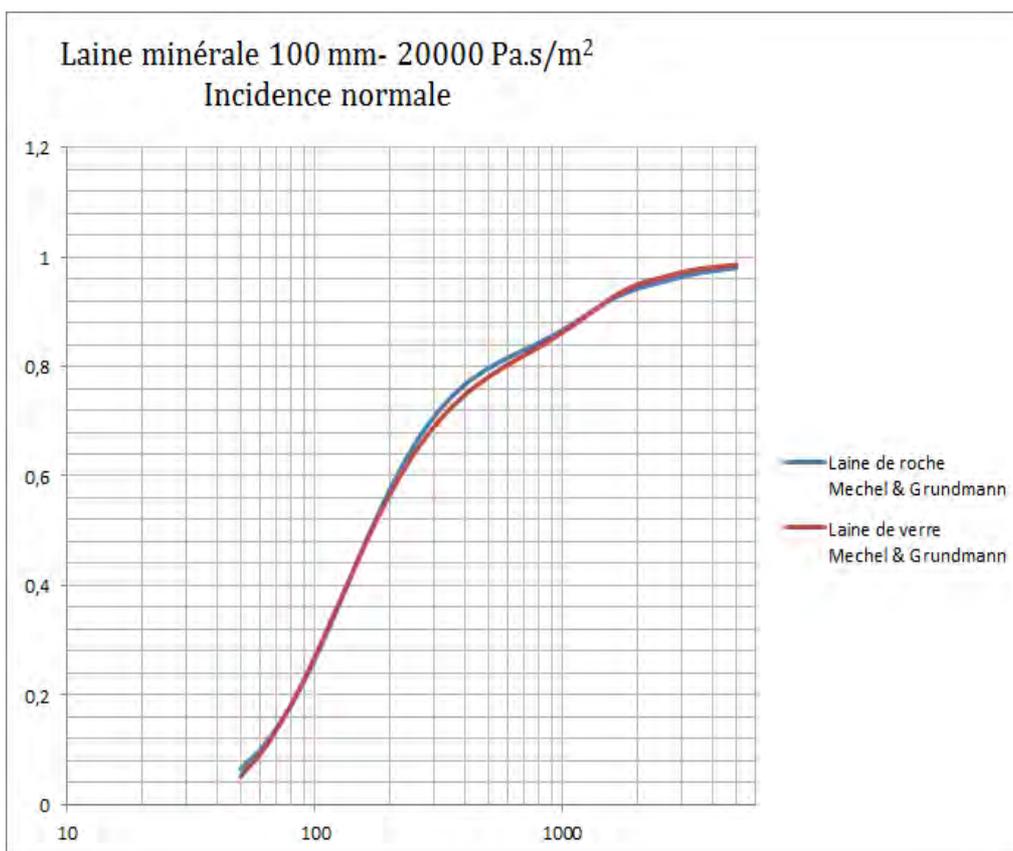
- une porosité proche de 1
- une résistivité à l'écoulement de l'air σ comprise entre 1000 et 50000 Pa.s/m²
- une quantité $\rho_0 \frac{f}{\sigma}$ comprise **entre 0,003 et 0,4**

Cette dernière condition permet une utilisation du modèle à partir de 20 Hz pour une laine ayant une résistivité au passage de l'air inférieure à 8000 Pa.s/m².

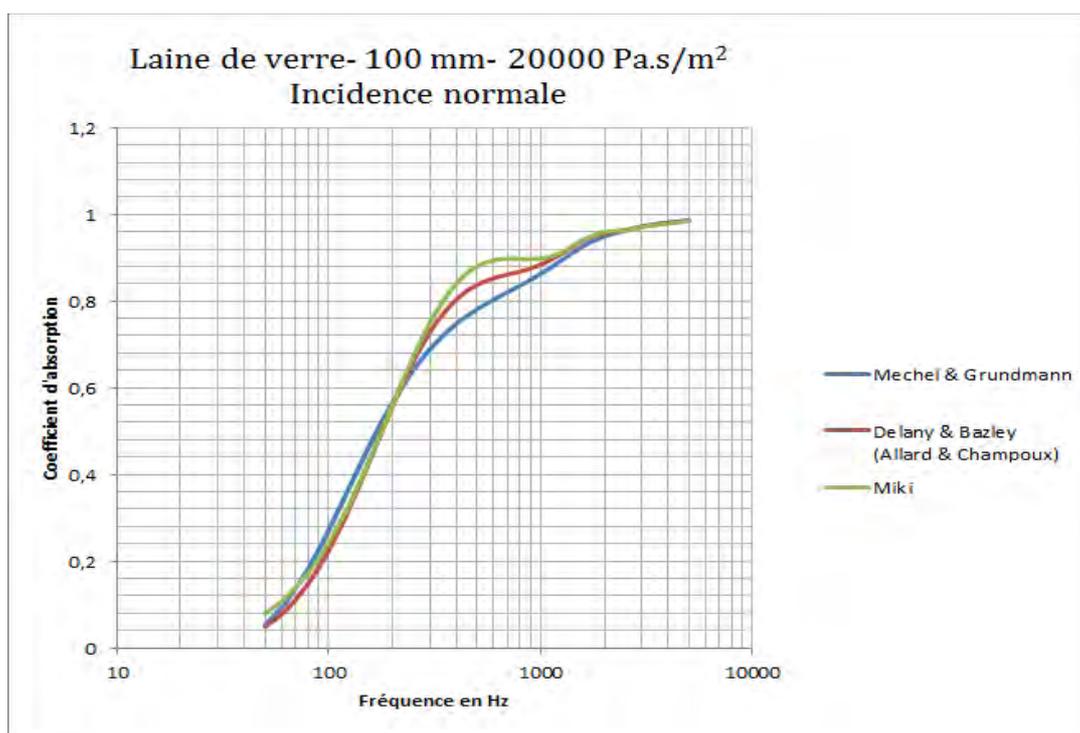
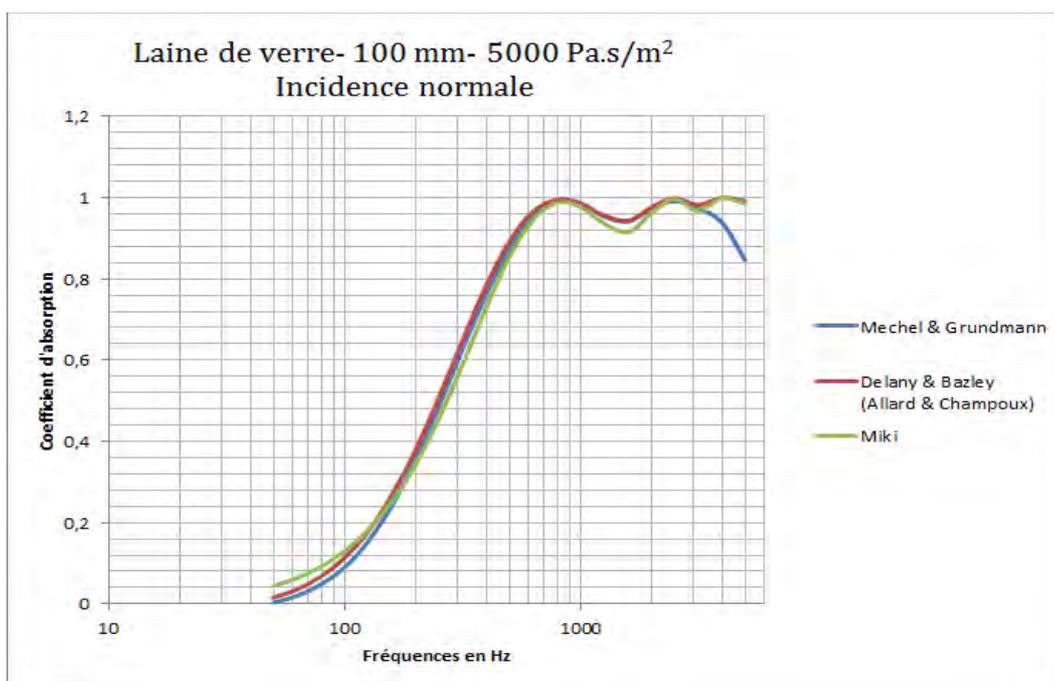
Les coefficients des polynômes sont indiqués dans les tableaux ci-dessous, en fonction de la nature de la laine minérale :

Coefficient	Z_m	
	Laine de verre	Laine de roche
a_1	$-0,001711387+0,00119489j$	$0,0026786+0,00385761j$
b_1	$0,283876-0,292168j$	$0,135298-0,39416j$
c_1	$-0,46386+0,188081j$	$0,946702+1,47653j$
d_1	$3,12736+0,9416j$	$-1,45202-4,56233j$
e_1	$-2,10920-1,32398j$	$4,03171+7,56031j$
f_1	0	$-2,86993-4,90437j$

Coefficient	k_m	
	Laine de verre	Laine de roche
a_2	-0,00451836+0,000541333j	-0,00355757-0,0000164897j
b_2	0,421987+0,37627j	0,421329+0,342011j
c_2	-0,383809-0,35378j	-0,507733+0,086655j
d_2	-0,610867+2,59922j	-0,142339+1,25986j
e_2	1,13341-1,74819j	1,29048-0,082081j
f_2	0	-0,771857-0,66805j



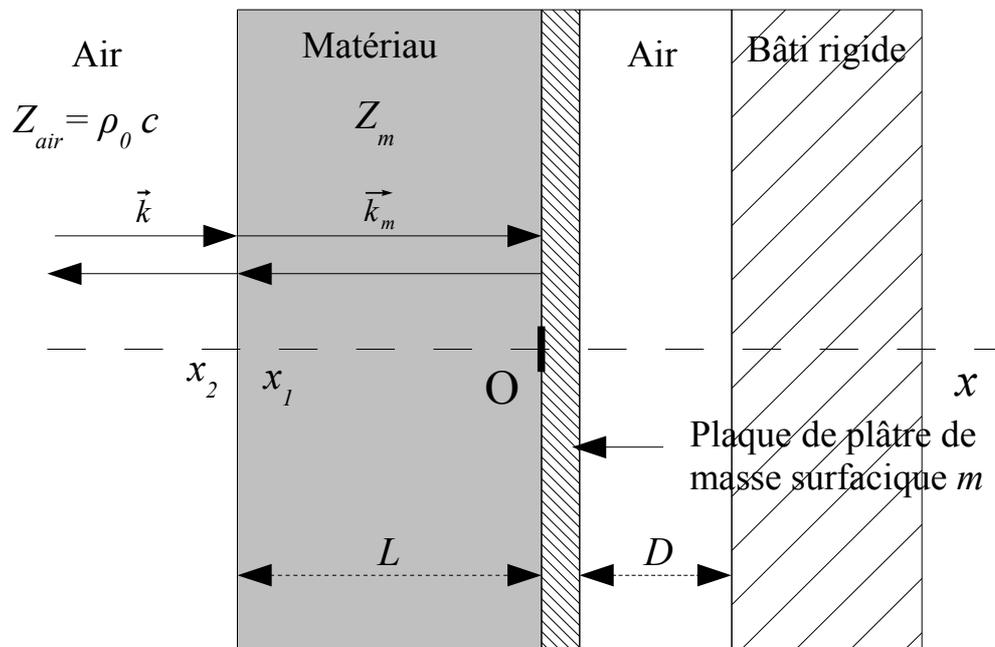
La distinction entre les coefficients **laine de verre** et **laine de roche** a peu d'effet marqué à la lecture des courbes d'absorption ci-dessus !



ANNEXE F :

Coefficient d'absorption théorique d'un matériau poreux apposé devant un support non rigide

Dans les chapitres précédents, on a toujours supposé que le matériau poreux était posé devant un support rigide d'impédance infinie. Dans la réalité, le matériau est souvent placé sur un support ayant une certaine souplesse. Dans l'exemple figurant ci-dessous, on considère que le matériau absorbant est apposé contre une plaque de plâtre (ou tout autre parement) devant un plénum d'air.



On avait établi, au chapitre 3, que le coefficient d'absorption s'écrivait :

$$\alpha_n = 1 - |R_p(x_2)|^2$$

où R_p était le coefficient de réflexion en pression à l'interface air-matériau :

$$R_p = \frac{Z(x_2) - \rho_0 c}{Z(x_2) + \rho_0 c}$$

Puis, en supposant la continuité des impédances pour un matériau de porosité proche de 1 :

$$Z(x_2) \approx Z(x_1) = \frac{Z(0) + jZ_m \tan(k_m L)}{1 + j \frac{Z(0)}{Z_m} \tan(k_m L)}$$

Le problème se résume maintenant à trouver une expression de $Z(0)$. Le modèle le plus commode est de considérer la plaque de plâtre et sa cavité d'air comme un système masse-ressort où le ressort est, dans le cas présent, constitué par la raideur de la cavité d'air. Il est également concevable de parfaire le modèle en incluant d'autres termes de raideur, en K/ω , comme la raideur de la plaque ou encore celles des montants. Malgré tout, nous ne considérons pour l'instant que la raideur du système est celle induite par le plénum d'air.

L'impédance du système masse-ressort s'écrit comme suit :

$$Z(0) = R + j \left(m\omega - \frac{\rho_0 c}{\tan(kD)} \right)$$

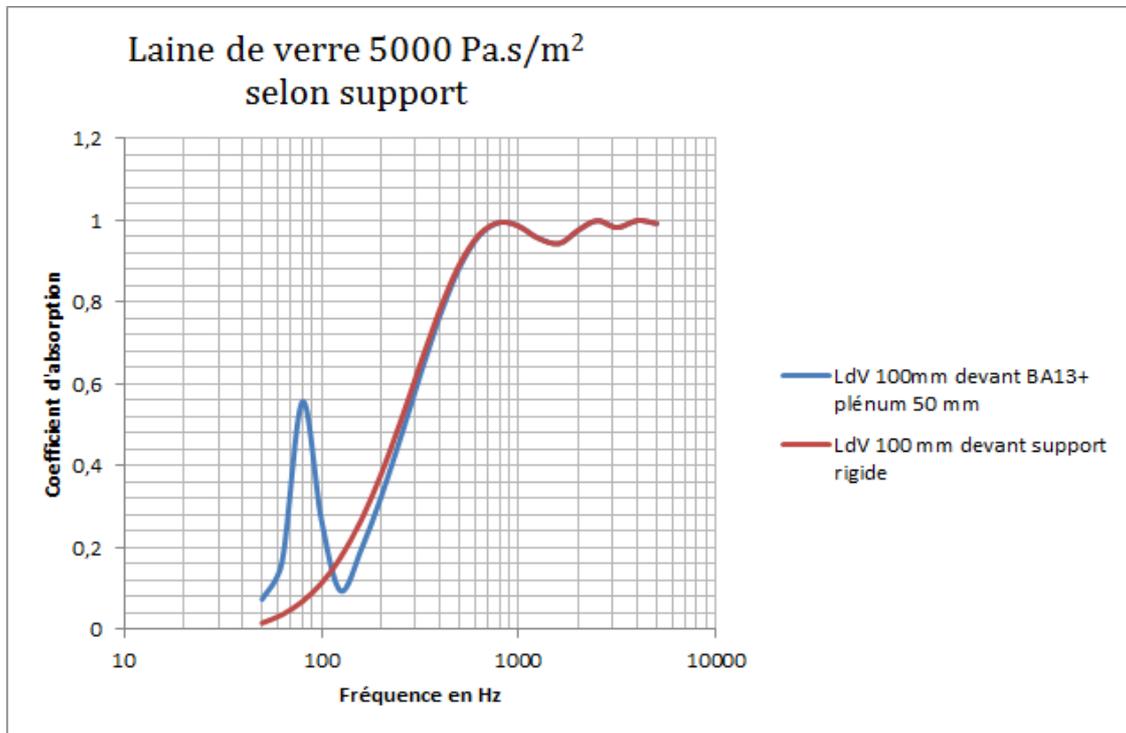
Où

- R est la résistance mécanique par unité de surface des éléments compliants de la plaque de plâtre
- m est la masse surfacique de la plaque de plâtre
- le terme $\rho_0 c / \tan(kD)$ contient la raideur par unité de surface de la compression d'air de la cavité que l'on retrouverait aisément par l'application directe de la formule de l'impédance ramenée du bâti rigide sur la plaque de plâtre.

Notons qu'en pratique, le terme résistif R est délicat à déterminer mais qu'il est généralement petit devant le terme imaginaire. À défaut d'une valeur nulle, on peut lui attribuer une valeur proche de 1000 Ns/m^3 pour tenir compte des dissipations structurelles et d'éventuelles fuites entre les raccords généralement constatées à l'usage.

En combinant, les deux relations précédentes, l'impédance $Z(x_2)$ devient :

$$Z(x_2) = \frac{R + j \left(m\omega - \frac{\rho_0 c}{\tan(kD)} \right) + jZ_m \tan(k_m L)}{1 + j \left[R + j \left(m\omega - \frac{\rho_0 c}{\tan(kD)} \right) \right] \frac{\tan(k_m L)}{Z_m}}$$



On remarque que le support se comporte comme un panneau fléchissant en apportant un surplus d'absorption dans les basses fréquences, autour d'une fréquence de résonance f_r , qui se calcule en cherchant le minimum de l'impédance $Z(x_2)$ qui induit un maximum du coefficient de réflexion en pression. Condition réalisée lorsque la partie imaginaire de $Z(0)$ s'annule :

$$m\omega - \frac{\rho_0 c}{\tan(kD)} = 0$$

En supposant de kD petit, c'est-à-dire dans l'approximation basse fréquence, $\tan(kD) \approx kD$ et la fréquence du premier maximum est donnée par :

$$f_r \approx \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_0}{mD}}$$

Les autres maxima se déterminent par la résolution exacte de l'équation précédente, par exemple à l'aide d'un grapheur ou d'un solveur, en cherchant les valeurs de kD , telles que :

$$\text{Cotan}(kD) = \frac{\rho_0}{mD} (kD)$$

Toutefois, cette recherche est inutile car les autres maxima se situent dans les hautes fréquences et leur effet est masqué par l'absorption du matériau absorbant apposé sur la plaque.

Plus intéressant, serait de parfaire le modèle de calcul en incluant dans l'expression de $Z(0)$ le terme de raideur mécanique de la plaque de plâtre. Ainsi $Z(0)$ pourrait prendre la forme suivante :

$$Z(0) = R + j \left(m\omega - \frac{K_{11}}{\omega} - \frac{\rho_0 c}{\tan(kD)} \right)$$

Qui deviendrait dans l'approximation basses fréquences avec $\tan(kD) \approx kD$:

$$Z(0) = R + j \left(m\omega - \frac{K_{11} + \frac{\rho_0 c^2}{D}}{\omega} \right)$$

Dans ce cas, on admettra que le coefficient de raideur par unité de surface du parement parfaitement fixé sur son pourtour, noté K_{11} , se calcule d'après :

$$K_{11} = b_{11}^2 B$$

avec

- b_{11} coefficient caractéristique de la plaque « encastrée » vibrant suivant le mode fondamental (1;1). Pour une plaque de dimensions XY , le coefficient est donné par :

$$b_{11} \approx 22,385 \sqrt{\frac{1}{X^4} + \frac{1}{Y^4} + \frac{0,6}{X^2 Y^2}}$$

- B module de flexion de la plaque exprimé en Nm:

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

où E est le module de Young, h l'épaisseur de la plaque et ν le coefficient de Poisson

Les indices 11 signifient que le problème ne prend en compte que le mode de vibration fondamental.

Notons toutefois que pour une plaque de plâtre, $\nu \approx 0,18$ et $E \approx 2,4$ GPa et dans la plupart des situations $K_{11} \ll \frac{\rho_0 c^2}{D}$. En première approximation, on peut négliger l'effet de la raideur de la plaque devant celle de la cavité de l'air.

Enfin dans le cas où la cavité d'air derrière le parement contient un matériau amortissant, le problème se traite de la même façon, à ceci près que le nombre d'onde devient complexe dans le plénum et que l'impédance de l'air $\rho_0 c$ est substituée par l'impédance du matériau absorbant, notée Z_n .

L'expression de $Z(0)$ devient alors:

$$Z(0) = R + j \left(m \omega - \frac{Z_n}{\tan(k_n D)} \right)$$

Où k_n et Z_n sont des grandeurs complexes qui se calculent encore une fois avec les formulations de **Delany & Bazley** ou tout autre modèle équivalent.

Il s'ensuit, au final, que :

$$Z(x_2) = \frac{R + j \left(m \omega - \frac{Z_n}{\tan(k_n D)} \right) + j Z_m \tan(k_m L)}{1 + j \left[R + j \left(m \omega - \frac{Z_n}{\tan(k_n D)} \right) \right] \frac{\tan(k_m L)}{Z_m}}$$

Toutefois, on pressent intuitivement que la mise en place du matériau amortissement dans la cavité aura peu d'effet spectaculaire sur les coefficients d'absorption. Elle devrait cependant décaler la fréquence de résonance du support vers les graves, le matériau amortissant ayant pour effet d'augmenter virtuellement la profondeur du plénum D .

*Remerciement à monsieur **Jean-Pierre Lafont**, électronicien, acousticien & enseignant, dirigeant de l'entreprise RT60, qui partage son expérience à travers le forum Cinetips, consacré aux cinémas et cinémas domestiques.*

Bibliographies :

- *Acoustic Absorbers and diffusers, Theory, design and application* de Trevor J. Cox and Peter D'Antonio (édition Taylor & Francis)
- *Acoustique des salles et sonorisation* de Jacques Jouhaneau (édition TEC & DOC)
- *Audio* de Mario Rossi (Édition Presse polytechniques et universitaires romandes)
- *Cours CNAM ACC103 « acoustique des salles et bâtiments »* de **Manuel Melon**
- *Master Handbook of acoustics* de F. Alton Everset et Ken C. Pohlmann (Mac Graw Hill)
- NF EN 12354-6 *Acoustique du bâtiment- Calcul de la performance acoustique des bâtiments à partir de la performance des éléments- Partie 6 : absorption acoustique des pièces et espaces fermés*
- *Notions élémentaires d'acoustique- Électroacoustique* 2^e édition de Jacques Jouhaneau (édition TEC & DOC)
- *Sound insulation* de Carl Hopkins (édition BH)

Liens :

- PDF Knauf <http://www.knaufinsulation.fr/sites/fr.knaufinsulation.net/files/absorptionacoustique.pdf>
- PDF de Komatsu: <http://www.cs.takushoku-u.ac.jp/~ymiki/AcoustProp.pdf>
- PDF de Miki: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/do...1&type=pdf>