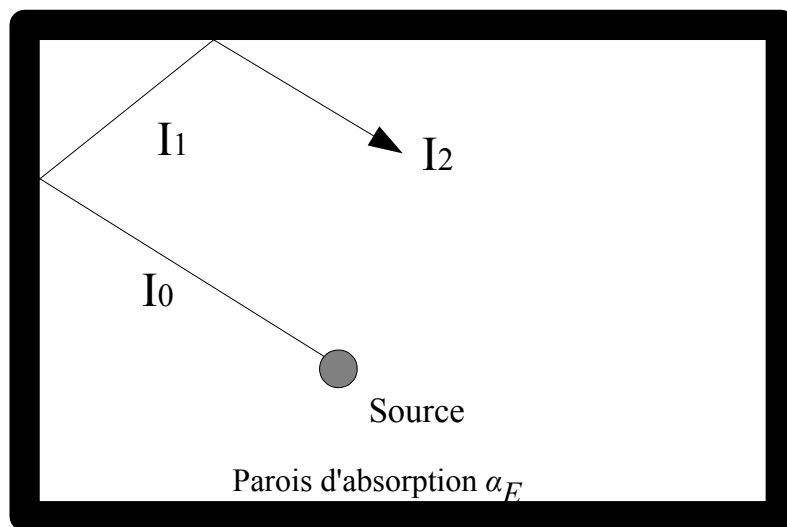


Formule d'Eyring

Frédéric Poirrier
Décembre 2012

En 1930, **Carl F. Eyring** a proposé une autre formulation, que celle de **Sabine**⁽¹⁾, permettant d'estimer le temps de réverbération dans un local. Ce petit exposé propose une démonstration simple de la formule d'Eyring (l'original figurant dans la publication *Reverberation time in «dead» rooms* indiquée en lien dans la bibliographie) puis dans un second temps, une comparaison de trois modèles de calcul avec un temps de réverbération mesuré in situ.

L'idée consiste à suivre le rayon sonore d'une onde plane⁽²⁾ dans une salle au cours de ses réflexions successives contre les parois en faisant l'hypothèse qu'à chaque rebond, une fraction de l'énergie est absorbée. Il suppose également que tous les rayons ont le même comportement dans le local, ce qui implique que les parois soient homogènes et le champ parfaitement diffus⁽³⁾.



On note α_E le coefficient d'absorption de la paroi défini par **Eyring** comme étant le *coefficient d'absorption énergétique moyen sous incidence statistique*. On définit ce coefficient d'absorption énergétique lors d'une réflexion par :

$$\alpha_E = \frac{E_{\text{absorbée}}}{E_{\text{incidente}}}$$

Soit I_0 l'énergie du rayon sonore incident issu de la source avant le premier rebond sur la paroi.

Après cette première réflexion, le rayon I_0 perd la fraction d'énergie $I_0 \alpha_E$.

Il vient alors que l'énergie du rayon sonore vaut après rebond :

$$I_1 = I_0 - I_0 \alpha_E = I_0(1 - \alpha_E)$$

Lors de la seconde réflexion, le rayon incident I_1 perd maintenant la fraction $I_1 \alpha_E$.

On a donc après le second rebond:

$$I_2 = I_1 - I_1 \alpha_E = I_1(1 - \alpha_E)$$

soit encore en substituant I_1 par $I_0(1 - \alpha_E)$

$$I_2 = I_0(1 - \alpha_E)^2$$

Il apparaît que les termes I_0 , I_1 et I_2 forment une suite géométrique⁽⁴⁾ de premier terme I_0 et de raison $1 - \alpha_E$.

L'énergie d'un rayon sonore qui se réfléchit n fois s'écrit donc:

$$I_n = I_0(1 - \alpha_E)^n$$

Par ailleurs, le temps de réverbération, noté TR , correspond à la durée nécessaire pour que l'intensité d'un son dans une pièce décroisse de 60 dB après extinction de la source. Pour le rayon sonore, cela revient à réduire son énergie initiale de -60 dB après n réflexions. On a donc

$$10 \log \left(\frac{I_n}{I_0} \right) = -60 \text{ dB}$$

Soit encore

$$10 \log \left(\frac{I_0(1 - \alpha_E)^n}{I_0} \right) = -60 \text{ dB}$$

d'où

$$(1 - \alpha_E)^n = 10^{-6} \quad (1)$$

D'autre part, le libre parcours moyen, noté d_m , est défini comme étant la distance moyenne parcourue par un rayon sonore, entre deux réflexions successives.

Après n réflexions, le rayon sonore parcourt une distance $n.d_m$ (comme n est grand, on assimile la distance parcourue par le rayon avant la première réflexion comme étant égale au libre parcours moyen).

Si durant ce trajet l'énergie du rayon est réduite de -60 dB, son temps de parcours t correspond au temps de réverbération TR . On a alors :

$$t = TR = \frac{n d_m}{c}$$

où c est la vitesse de propagation du son.

De cette dernière relation, on exprime n :

$$n = \frac{c \cdot TR}{d_m}$$

Puis en substituant n dans la relation (1), il vient :

$$(1 - \alpha_E)^{\frac{c \cdot TR}{d_m}} = 10^{-6}$$

En prenant le logarithme décimal des deux termes de l'égalité ci-dessus, il vient :

$$\frac{c \cdot TR}{d_m} \log(1 - \alpha_E) = -6$$

Et après transformation, le temps de réverbération d'après **Eyring** s'écrit :

$$TR = \frac{-6 d_m}{c \cdot \log(1 - \alpha_E)} \quad (2)$$

Il existe différentes formulations du libre parcours moyen d_m . Pour sa part, **Eyring** a opté pour le libre parcours moyen établi par **Jaeger** et qui vaut :

$$d_m = \frac{4V}{S}$$

où V est le volume de la salle et S l'aire totale des parois.

En substituant d_m dans (2) par cette dernière expression, il vient que :

$$TR = \frac{-24V}{cS \cdot \log(1 - \alpha_E)}$$

Il est d'usage d'exprimer la formule d'Eyring avec un logarithme népérien plutôt qu'un logarithme décimal. On rappelle que $\log(x) = \frac{\ln(x)}{2,30}$, dans ce cas le temps de réverbération s'écrit :

$$TR = \frac{-55,2 V}{cS \cdot \ln(1 - \alpha_E)}$$

Avec $c = 343$ m/s, il vient au final :

$$TR = \frac{0,16 V}{-S \cdot \ln(1 - \alpha_E)}$$

C'est la formule du temps de réverbération d'après Eyring.

Remarquons la similitude avec la formule de Sabine qui s'écrit pour sa part:

$$TR = \frac{0,16 V}{A} = \frac{0,16 V}{\alpha S}$$

Notons que lorsque le coefficient d'absorption énergétique α_E est petit devant 1, on peut remplacer dans la formule d'Eyring, le logarithme népérien par son développement limité au premier ordre :

$$\ln(1 - \alpha_E) \approx -\alpha_E$$

Dans ce cas, la formule d'Eyring équivaut à la formule de Sabine.

Notons aussi que la formulation d'Eyring, contrairement à celle de Sabine, est cohérente si les parois du local sont totalement absorbantes :

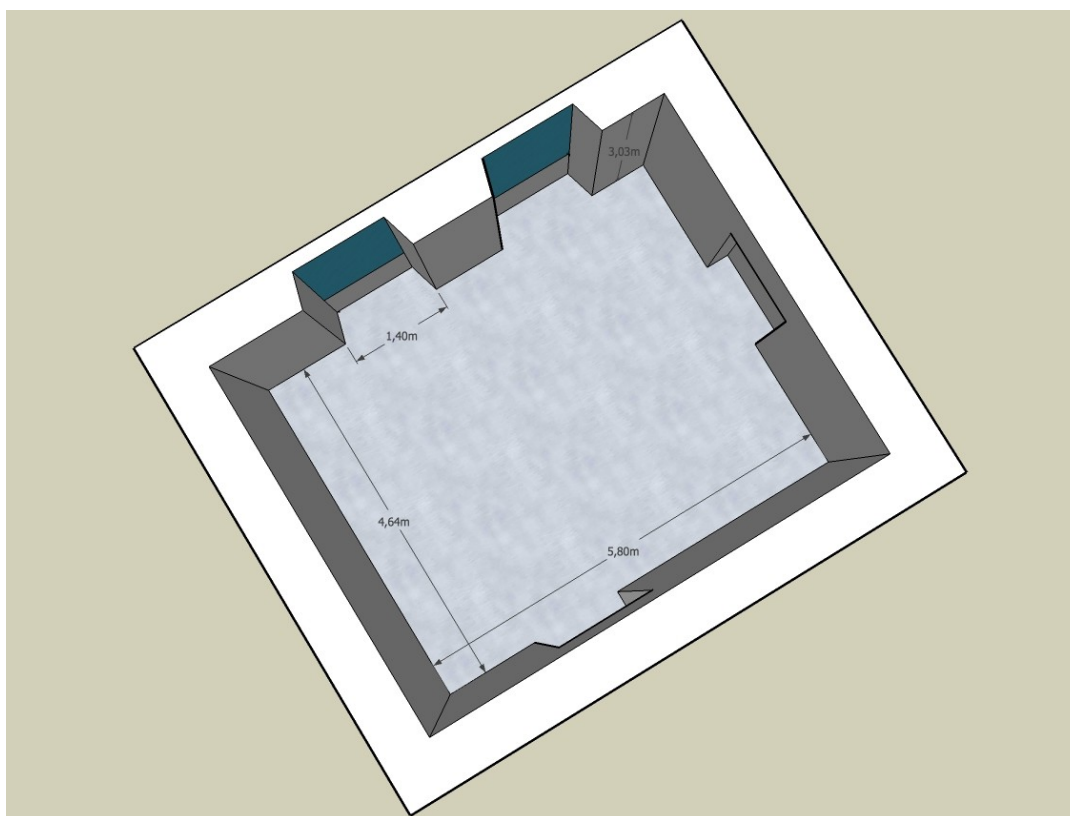
En effet, dans ce cas $\alpha_E \rightarrow 1$, il suit que $\ln(1 - \alpha_E) \rightarrow -\infty$ d'où $TR \rightarrow 0$

Ce temps de réverbération nul correspond bien à la valeur théorique attendue d'une chambre anéchoïque dont les parois sont totalement absorbantes.

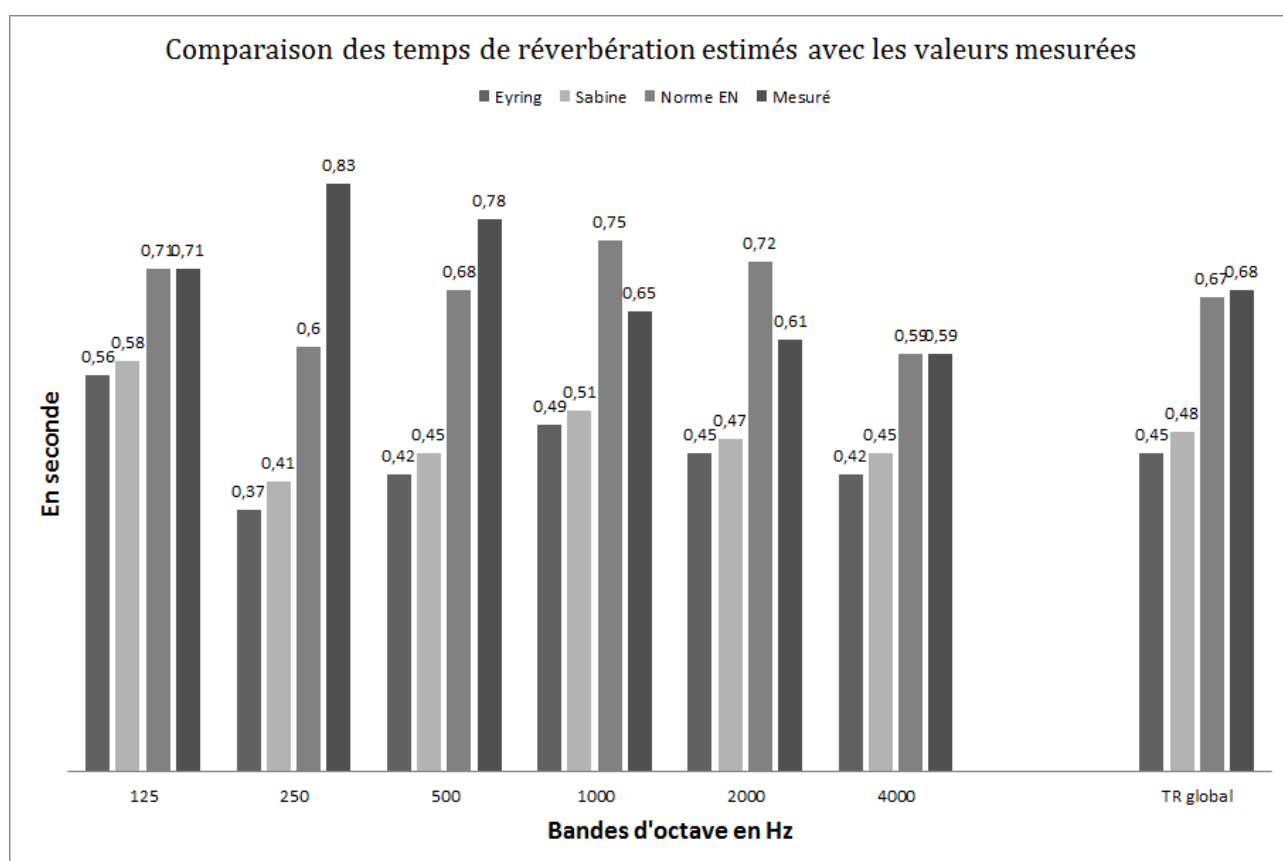
À contrario, avec la formule de Sabine, lorsque $\alpha \rightarrow 1$, on obtient $TR=0,16V/S \neq 0$!

Il est fait usage de la formule d'Eyring dès lors que le coefficient d'absorption moyen α dépasse 0,2 avec l'hypothèse que $\alpha_E = \alpha$. Cependant, les coefficients d'absorption de Sabine sont déterminés d'après la formulation de Sabine par mesures de temps de réverbération en chambre réverbérante. Ces coefficients de Sabine sont donc parfaitement adaptés à une utilisation dans la formule de Sabine et pour des salles relativement similaires à celles des conditions de mesure (grande salle réverbérante). Ce qui signifie, que l'hypothèse de prendre $\alpha_E = \alpha$ dans la formule d'Eyring, est relativement forte. Rappelons enfin que les formules d'Eyring et de Sabine sont issues de modèles mathématiques qui supposent les champs acoustiques parfaitement diffus avec des répartitions homogènes de l'absorption des parois. En pratique, ces conditions sont rarement réalisées.

Pour finir cet exposé, considérons le local dont le croquis figure ci-dessous. C'est la pièce annexe d'un restaurant scolaire dont les temps de réverbération⁽⁵⁾ ont été mesurés par bandes d'octave lors d'un diagnostic acoustique. Le sol est constitué d'un linoléum sur béton, les murs sont habillés de plaques de plâtre et le plafond est pourvu de dalles acoustiques devant plénum ($\alpha_w \approx 0,70$ ⁽⁶⁾). La salle est aménagée de 30 petites chaises et 5 tables.



Le diagramme ci-dessous montre les temps de réverbération par bandes d'octave et globaux⁽⁷⁾ estimés selon les formules d'Eyring et de Sabine ainsi que par une méthode de calcul décrite dans une récente norme européenne informative particulièrement bien adaptée aux distributions irrégulières de l'absorption. Cette dernière méthode de calcul, assez novatrice mais relativement compliquée, présente l'avantage de prendre en compte l'imperfection du champ diffus, la nature éventuellement diffusante⁽⁸⁾ des parois et l'hétérogénéité de la disposition des matériaux absorbant.



Il apparaît d'après les résultats que l'estimation des temps de réverbération selon la formule d'Eyring est loin des valeurs réelles mesurées in situ. La formule d'Eyring indique un temps de réverbération global avec 34 % d'erreur et jusqu'à 55 % sur la bande d'octave de 250 Hz !!! Par ailleurs, le TR Eyring n'est pas plus exact que le TR Sabine alors que la présence d'un faux plafond acoustique absorbant laisse à penser qu'un calcul prévisionnel Eyring est plus approprié.

Les écarts constatés entre valeurs réelles et calculs prévisionnels selon d'Eyring ou Sabine proviennent du fait que les conditions de champ diffus et de répartition homogène de l'absorption ne sont pas réalisées. Il existe aussi des incertitudes sur les données d'entrées et notamment sur les coefficients d'absorption de Sabine. Seul le calcul selon la norme européenne indique des temps de réverbération convenables en correspondance avec la réalité.

En pratique, on considère que la formule de Sabine (et par conséquent de celle d'Eyring) peut être appliquée avec de bons résultats si :

- aucune dimension de la salle n'est 5 fois plus grande qu'une autre
- le coefficient d'absorption moyen ne varie pas de plus de 3 fois entre deux surfaces opposées
- il y a peu d'objets dans la pièce

Dans l'exemple de la salle annexe, le faux plafond acoustique absorbant opposé au sol réfléchissant ne permet pas à la seconde condition d'être vérifiée. Dans notre cas, l'utilisation des formules de Sabine ou d'Eyring n'était donc pas appropriée.

Il convient donc d'avoir suffisamment de recul vis-à-vis des formules usuelles prévisionnelles des temps de réverbération.

- (1) Voir également <http://www.conseils-acoustique.com/images/articles/Sabine.pdf>
- (2) Approximation onde plane qui signifie que l'on néglige la divergence géométrique c'est-à-dire la décroissance de l'intensité sonore en fonction de la distance parcourue par le rayon.
- (3) Décroissance de l'intensité sonore linéaire et spatialement uniforme.
- (4) On rappelle que le terme de rang n d'une suite géométrique s'écrit $U_n = U_0 q^n$ où q est la raison de la suite.
- (5) Obtenu d'après le TR20 c'est-à-dire sur une décroissance de -5 à -25 dB selon ISO 3382.
- (6) Il s'agit de l'indice d'absorption acoustique pondéré d'après une courbe de référence. Dans le cas présent, il correspond à peu près aux α Sabine par bandes d'octave.
- (7) Moyennes arithmétiques sur les six bandes d'octave.
- (8) Voir également <http://www.conseils-acoustique.com/images/articles/louiderayleigh.pdf>

Bibliographies :

Acoustique des salles et sonorisation de Jacques Jouhaneau (Collection CNAM édition TEC & DOC)

Audio de Mario Rossi (presses polytechniques et universitaires Romandes)

Norme Afnor

Reverberation time in «dead» rooms :

<http://www.trueaudio.com/array/downloads/CF%20Eyring-Reverb%20Time%20in%20Dead%20Rooms.pdf>