

Ondes stationnaires

Frédéric Poirrier

Novembre 2014

Dans les salles, l'action des ondes stationnaires sur la réponse amplitude-fréquences a généralement des conséquences spectaculaires cela d'autant plus que les dimensions des locaux sont petits vis-à-vis des longueurs d'ondes mises en jeux. Les studios de prises de son, cabines de mixage ou les pièces dédiées au cinéma domestique sont particulièrement concernés par ces phénomènes et il convient de ne pas en négliger les effets lors des études acoustiques.

On propose, dans cet exposé de théoriser quelques notions élémentaires. On abordera les équations du champ de pression acoustique sur **une** puis **trois** dimensions de l'espace, **sans** et **avec** source, puis on étudiera l'incidence de la présence d'un matériau absorbant contre une paroi rigide sur les modes propres.

Les lecteurs soucieux d'approfondir ces notions pourront consulter avantageusement les nombreux manuels d'acoustique générale. Je leur recommande le très classique ouvrage de Catherine Potel et Michel Bruneau *Acoustique générale Équations différentielles et intégrale, solutions en milieux fluides et solides, application* pour sa rigueur et la qualité pédagogique des auteurs.

SOMMAIRE

1) Ondes planes stationnaires sur une dimension, sans source	page 3
2) Ondes planes stationnaires sur trois dimension , sans source	page 10
3) Ondes planes stationnaires sur une dimension, avec source	page 18
4) Ondes planes stationnaires sur trois dimension , avec source	page 23
5) Ondes planes stationnaires sur une dimension, sans source avec matériau absorbant sur les parois	page 27
6) Ondes planes stationnaires sur une dimension, avec source et matériau absorbant sur une parois	page 46
7) Ondes planes stationnaires sur trois dimension, cas général , théorie de Morse & Ingrad	page 49
Annexe A : Fonction potentielles des vitesses en acoustique	page 52
Annexe B : Condition aux frontières dans le domaine fréquentiel	page 54
Annexe C : Équation d'Helmholtz	page 57
Annexe D : Tangente d'un nombre complexe ?!?	page 59
Annexe E : Équation intégrale 1D- Fonction de Green	page 61

1) Ondes planes stationnaires sur une dimension, sans source

On débute l'étude des ondes planes stationnaires en ne considérant qu'une seule dimension de l'espace. Situation particulière, concernée par les champs acoustiques existants dans les tubes fermés (ou ouverts), mais aussi dans les salles closes dès lors qu'une dimension est prépondérante au sens géométrique ou bien acoustique du terme c'est-à-dire que les modes axiaux dominent. La recherche des modes du champ de pression peut alors s'effectuer, en première approximation, en ne considérant qu'une seule variable d'espace. Par ailleurs, on préfère dans cet exposé se placer du point de vue de l'acoustique des salles plutôt que celui des conduits, c'est pourquoi on supposera toujours le domaine fermé par deux parois parallèles.

On considère, dans un premier temps, l'absence de source sonore. Ce qui signifie que le champ de pression n'est envisagé qu'après l'extinction de la source. Par analogie avec les équations différentielles, c'est l'équivalent du **régime libre**.

La pression dépend alors de deux variables : l'une d'espace x et l'autre temporelle t .



La pression doit satisfaire l'équation des ondes qui s'écrit pour une dimension, sans second membre en l'absence de source, comme suit :

$$\frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Où c_0 est la célérité de l'onde de pression.

On a recourt à la méthode des variables séparées pour résoudre cette équation aux dérivées partielles en cherchant une solution de la forme :

$$p(x;t) = X(x) \cdot T(t) \quad (2)$$

où X est une fonction de la variable d'espace x et T une fonction de la variable du temps t .

En injectant la solution (2) dans l'équation d'onde (1), il vient aisément :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} T(t) - \frac{1}{c_0^2} X(x) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0$$

soit encore en divisant l'égalité par $X(x)T(t)$ puis en séparant les variables :

$$c_0^2 \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3)$$

Cette égalité doit être vérifiée quelles que soient les valeurs des variables indépendantes x et t . Cela n'est possible que si chaque membre de l'équation (3) est égal à une seule et même constante, notée $-\omega^2$, par exemple.

On a alors deux équations différentielles à résoudre. La première concernant la fonction de l'espace :

$$c_0^2 \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\omega^2$$

Qui devient en posant $k = \frac{\omega}{c_0}$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X(x) = 0 \quad (4)$$

et la seconde porte sur la fonction temporelle :

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2$$

soit encore

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (5)$$

La solution de l'équation (4) est

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (6)$$

Ou encore sous sa forme équivalentes exponentielles

$$\hat{X}(x) = \hat{C} e^{jkx} + \hat{D} e^{-jkx}$$

$\hat{X}$ désigne la représentation complexe de la grandeur réelle X , $X = \Re(\hat{X})$ où $\Re$ signifie « partie réelle de ». On adopte pour cette convention d'écriture dans la suite de l'exposé.

De même, la solution de l'équation (5) est

$$T(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t) \quad (7)$$

ou sous sa forme équivalentes exponentielles

$$\hat{T}(t) = \hat{G} e^{j\omega t} + \hat{H} e^{-j\omega t} \quad (8)$$

Comme le temps est une grandeur orientée, il convient de choisir $\hat{G}$ ou $\hat{H}$ nulle, c'est-à-dire de ne conserver que le terme en ωt ou bien celui en $-\omega t$ (ou pour la forme réelle, E ou F nulle). Ici nous imposons arbitrairement $\hat{H} = 0$ pour ne conserver que le terme ωt . Il en découle que la fonction temporelle, sous sa forme complexe, est :

$$\hat{T}(t) = \hat{G} e^{j\omega t}$$

$\hat{G}$ étant une amplitude complexe pouvant comprendre un terme de phase.

Nous préférons ici opter pour la forme trigonométrique pour ce qui concerne la fonction spatiale $X(x)$ et la forme complexe pour la fonction temporelle $\hat{T}(t)$.

Au final, l'expression de la solution de l'équation des ondes s'écrit :

$$\hat{p}(x; t) = X(x) \cdot \hat{T}(t) = [\hat{A}' \cos(kx) + \hat{B}' \sin(kx)] e^{j\omega t} \quad (9)$$

avec $\hat{A}' = A \hat{G}$ et $\hat{B}' = B \hat{G}$

Remarquons que l'on a souhaité une solution bornée à l'équation différentielle temporelle (5). Cela impose nécessairement que la constante soit $-\omega^2$. En effet, dans le cas contraire, avec une constante prise égale à ω^2 , l'équation aurait été :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \omega^2 T(t) = 0$$

et la solution, une combinaison linéaire de sinus et cosinus hyperboliques tel que :

$$T(t) = A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$$

Or avec une telle fonction, lorsque $t \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$. Physiquement, cela signifierait que la pression soit infinie au bout d'un certain temps, ce qui n'est heureusement pas constaté à l'usage ! Cela explique que la constante ait été prise à $-\omega^2$ et non ω^2 .

Il nous faut maintenant déterminer les constantes $\hat{A}'$ et $\hat{B}'$ d'après les conditions aux limites du domaine. On se place dans un cas particulier où aux frontières, **les vitesses particulières sont nulles**. C'est la **condition de Neumann** (voir annexe B), qui correspond pour une salle à la situation où les parois sont parfaitement rigides c'est-à-dire d'impédance Z infinie (ou d'admittance nulle).

Cette condition s'écrit en $x = 0$ et $x = L$ par :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0$$

Cette expression traduit simplement le fait que la vitesse particulière est nulle sur la paroi. En effet, d'après la relation d'Euler en régime harmonique, la dérivée partielle de la pression est liée à la vitesse particulière $\hat{V}$ par la relation de proportionnalité suivante :

$$j\omega\rho_0 \hat{V} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}$$

La dérivée partielle de $\hat{p}(x; t)$ s'écrit simplement :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = [-\hat{A}' k \sin(kx) + \hat{B}' k \cos(kx)] e^{j\omega t} \quad (10)$$

D'après la condition aux limites, en $x = 0$:

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}_{x=0} = -\hat{B}' k e^{j\omega t} = 0$$

ce qui implique forcément que $\hat{B}' = 0$.

L'autre condition aux limites, en $x = L$ donne :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}_{x=L} = -\hat{A}' k \sin(kL) e^{j\omega t} = 0$$

Comme $\hat{A}' \neq 0$ pour obtenir une solution physique non nulle, cela impose

$$\sin(kL) = 0$$

et par voie de conséquence :

$$kL = m\pi \text{ avec } m = 0, 1, 2, \dots$$

d'où

$$k_m = \frac{m\pi}{L} \quad (11)$$

Il y a quantification du nombre d'onde et donc de la pulsation et de la fréquence qui se notent maintenant accompagné de l'indice m .

$$\omega_m = \frac{m\pi c_0}{L} \quad \text{et} \quad f_m = \frac{mc_0}{2L}$$

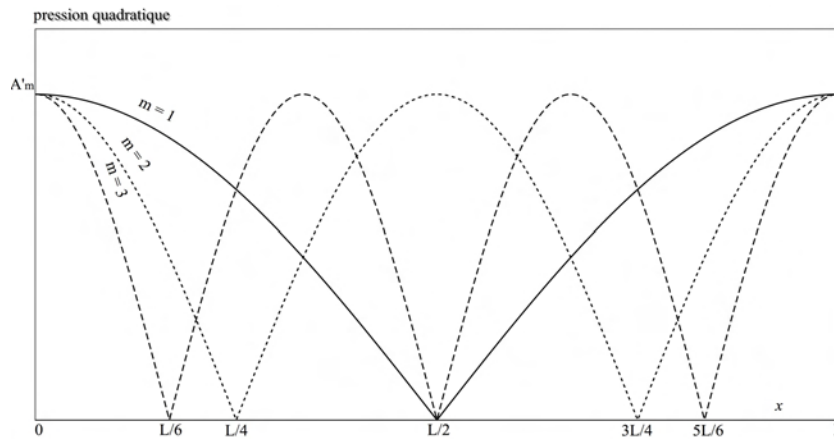
Les fréquences propres f_m dépendent de la célérité de l'onde c_0 , de la longueur L ainsi que du nombre entier m . **Les fréquences propres sont les seules fréquences persistantes après arrêt de la source sonore.** Évidemment, elles n'existent que si elles sont présentes dans le champ initial avant extinction de la source.

La pression d'un mode particulier m s'écrit alors d'après (11) :

$$\hat{p}_m(x; t) = \hat{A}'_m \cos(k_m x) e^{j\omega_m t} = \hat{A}'_m \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) e^{j\omega_m t} \quad (12)$$

En toute rigueur, l'amplitude complexe $\hat{A}'$ doit s'écrire maintenant $\hat{A}'_m$ pour distinguer chacun des modes. Si la source de bruit est idéalement linéaire et si l'impédance de la paroi est infinie (coefficient de réflexion en pression égal à 1) tous les modes ont même amplitude. Évidemment, ce cas est purement théorique !

Le graphique ci-dessous indique l'amplitude de la pression quadratique des trois premiers modes en fonction de la position x :



On remarque une succession de maxima (ventres) et de zéros de pression (nœuds). Remarquons que tous les modes présentent un maximum en $x = 0$ et $x = L$ ce qui en pratique signifie que la pression est importante contre les parois rigides d'une salle.

Signalons le nœud de pression à mi-longueur ($x = L/2$) pour le mode fondamental $m = 1$, ou plus généralement pour tous les modes impairs, le terme en cosinus s'annule.

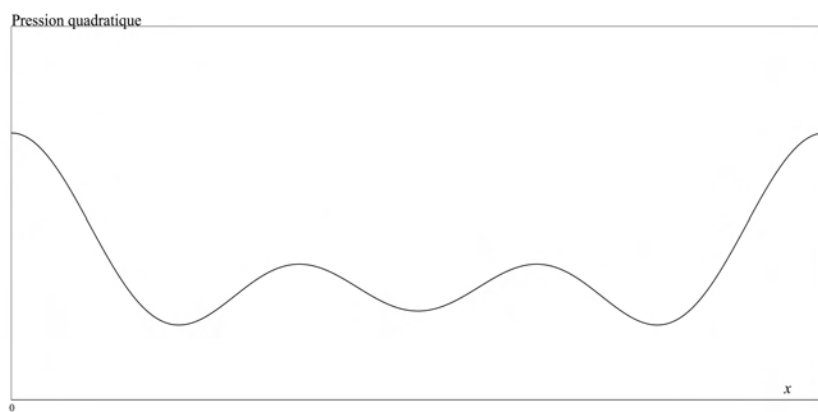
La pression réelle totale en un point d'abscisse x , exprimée après extinction de la source, s'écrit comme la somme des pressions partielles « modales », soit :

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} |\hat{A}'_m| \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos(\omega_m t + \varphi_m) \quad (13)$$

L'amplitude complexe $\hat{A}'_m$ pouvant contenir une information de phase, il convient de prendre son module, le terme de phase φ_m apparaissant alors dans la fonction temporelle. Dans le cas présent, cette grandeur est inconnue car dépendante du champ initial avant extinction de la source.

Notons que la pression portée par le mode particulier $m = 0$ est uniforme et ne fluctue pas au cours du temps ($\omega_0 = 0$). En conséquence, il ne contribue pas au champ de pression acoustique.

Le graphique ci-dessous donne la somme des pressions quadratiques des trois premiers modes propres avec $|\hat{A}'_m|$ pris égal à l'unité quel que soit m .

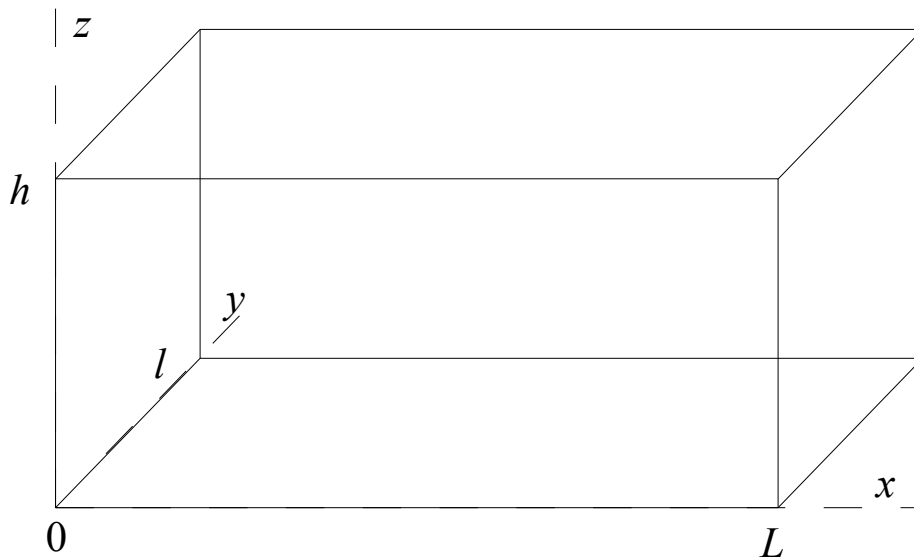


Cette sommation des pressions quadratiques « modales » est purement mathématique. En situation réelle, les coefficients $|\hat{A}'_m|$ dépendent du rang m et du champ initial. Malgré tout, cet aspect théorique souligne l'importance de la pression contre les parois et l'inhomogénéité du champ de pression.

Enfin signalons que le problème ne contient pas de termes dissipatifs et la pression acoustique va ainsi perdurer indéfiniment sans jamais décroître au cours du temps ! Bien entendu, cette situation est purement théorique.

2) Ondes planes stationnaires sur trois dimensions, sans source

Le problème précédent est repris maintenant dans un espace à trois dimensions en coordonnées cartésiennes $(x; y; z)$ avec les mêmes hypothèses, c'est-à-dire sans source dans une salle de dimensions $L \times l \times h$ et aux parois parfaitement rigides (impédances infinies).



Dans ce cas, la solution du problème passe par la résolution de l'équation des ondes qui s'écrit pour trois dimensions :

$$\Delta p(x; y; z; t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(x; y; z; t)}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

Où Δ est l'opérateur Laplacien qui s'exprime en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Nous recherchons une solution de la forme

$$p(x; y; z; t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (15)$$

Le report de cette solution dans l'équation des ondes (14) donne

$$c_0^2 \left[\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (15')$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit les valeurs des variables spatiales et de la variable temporelle t . Cela n'est possible que si les deux membres de l'équation précédente sont égaux à une seule et même constante, notée $-\omega^2$, par exemple.

Par voie de conséquence, on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

Équation identique à (4) et dont la solution dans le domaine complexe s'écrit avec notre convention d'orientation :

$$\hat{T}(t) = \hat{G} e^{j\omega t}$$

La constante $\hat{G}$ étant un facteur arbitraire multiplié par d'autres facteurs arbitraires, on l'omettra par la suite afin de ne pas alourdir inutilement les écritures.

Puis en posant encore une fois $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$, il vient pour le premier membre de (15'):

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_0^2$$

Soit encore

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k_0^2 = -k_x^2$$

Cette égalité doit être vérifiée quelles que soient la valeur de la variable x et des variables y et z . Cela n'est possible que si les deux membres de l'équation précédente sont égaux à une seule et même constante, notée $-k_x^2$, par exemple.

Il vient alors que :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X(x) = 0$$

Dont la solution sous sa forme réelle est :

$$X(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad (16)$$

De même, par un raisonnement analogue, on a :

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k_0^2 + k_x^2 = -k_y^2$$

et

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y(y) = 0$$

dont la solution réelle est :

$$Y(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \quad (17)$$

Puis enfin

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_0^2 + k_x^2 + k_y^2 = -k_z^2 \quad (18)$$

soit encore

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z(z) = 0$$

Dont la solution réelle est :

$$Z(z) = E \cos(k_z z) + F \sin(k_z z)$$

Au final, la pression s'écrit :

$$\hat{p}(x; y; z; t) = P(x; y; z) e^{j\omega t}$$

avec

$$p(x; y; z) = [A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)] [C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)] [E \cos(k_z z) + F \sin(k_z z)]$$

et la relation dite de dispersion qui découle de (18)

$$k_0^2 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (19)$$

On applique la condition de Neumann (voir annexe B) aux limites du domaine, qui correspond pour une salle à la situation où les parois sont d'impédances infinies.

Dans ce cas, la condition aux frontières s'écrit $\frac{\partial \hat{p}(M; \omega)}{\partial n} = 0$ sur toutes les parois, soit encore :

- $-\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0$ en $x = 0$ et $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0$ $x = L$
- $-\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0$ en $y = 0$ et $\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0$ $y = l$
- $-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = 0$ en $z = 0$ et $\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = 0$ $z = h$

On a

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = [-\hat{A} k_x \sin(k_x x) + \hat{B} k_x \cos(k_x x)] \hat{p}(y; z) e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = [-\hat{C} k_y \sin(k_y y) + \hat{D} k_y \cos(k_y y)] \hat{p}(x; z) e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = [-\hat{E} k_z \sin(k_z z) + \hat{F} k_z \cos(k_z z)] \hat{p}(x; y) e^{j\omega t}$$

Les conditions aux limites en $x = y = z = 0$ s'écrit sur les trois parois:

$$\frac{\partial \hat{p}(x; t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{p}(y; t)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{p}(z; t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

qui implique nécessairement que $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ et $\mathbf{F} = 0$

Les conditions aux limites en $x = L$, $y = l$ et $z = h$ donnent respectivement :

$$\frac{\partial \hat{p}(x; t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = [-\hat{A} k_x \sin(k_x L)] \hat{p}(y; z) e^{j\omega t} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{p}(y; t)}{\partial y} \Big|_{y=l} = [-\hat{C} k_y \sin(k_y l)] \hat{p}(x; z) e^{j\omega t} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{p}(z; t)}{\partial z} \Big|_{z=h} = [-\hat{E} k_z \sin(k_z h)] \hat{p}(x; y) e^{j\omega t} = 0$$

$\hat{A}$, $\hat{C}$ et $\hat{E}$ étant différents de zéro pour avoir une solution physique non nulle, imposent :

$$\sin(k_x L) = 0$$

$$\sin(k_y l) = 0$$

$$\sin(k_z h) = 0$$

et par voie de conséquence

$$k_x L = m\pi \text{ avec } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_y l = n\pi \text{ avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_z h = p\pi \text{ avec } p = 0, 1, 2, \dots$$

d'où

$$k_{xm} = \frac{m\pi}{L}$$

$$k_{yn} = \frac{n\pi}{l}$$

$$k_{zp} = \frac{p\pi}{h}$$

En utilisant la relation de dispersion (15), il vient aisément :

$$k_0^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2$$

Le nombre d'onde k_0 est maintenant quantifié par trois nombres entiers positifs m , n et p .

Les fréquences propres qui en découlent sont alors données par l'expression, bien connue :

$$f_{mnp} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2}$$

Dans le cas particulier où $n = p = 0$, on retrouve l'expression de la fréquence propre à une dimension (axiale):

$$f_{m00} = \frac{mc_0}{2L}$$

Les fonctions $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ et $\hat{T}(t)$ étant maintenant déterminées, il vient d'après (15) que :

$$\hat{p}_{mnp}(x; y; z; t) = |\hat{A}_{mnp}| \cos(k_{xm}x) \cos(k_{yn}y) \cos(k_{zp}z) e^{j\omega_{mnp}t}$$

$$\text{avec } \omega_{mnp} = k_0 c_0 = \sqrt{\left(\frac{m\pi c_0}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi c_0}{l}\right)^2 + \left(\frac{p\pi c_0}{h}\right)^2}$$

soit encore

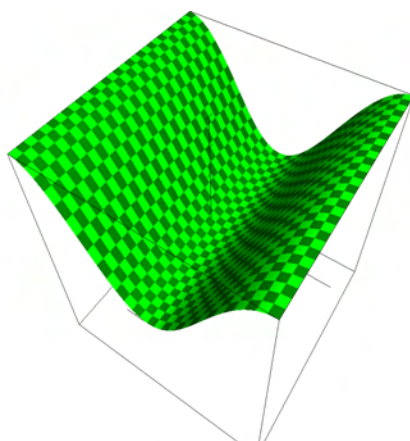
$$\hat{p}_{mnp}(x; y; z; t) = |\hat{A}_{mnp}| \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{h}z\right) e^{j\omega_{mnp}t}$$

Au final, la pression totale en un point de coordonnées $(x; y; z)$ exprimée après extinction de la source, s'écrit comme la somme des pressions « modales », soit :

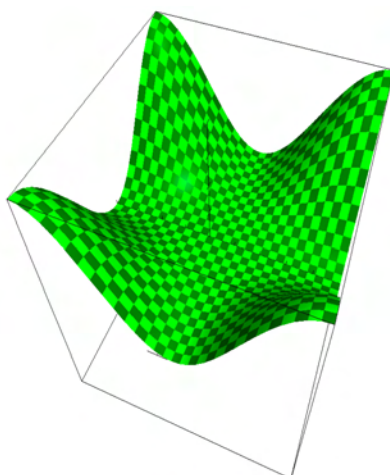
$$p(x; y; z; t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |\hat{A}_{mnp}| \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{h}z\right) \cos(\omega_{mnp}t + \varphi_{mnp})$$

Comme pour le champ à une dimension, les **fréquences propres sont les seules fréquences persistantes après arrêt de la source sonore** et elles n'existent que si elles sont présentes dans le champ initial avant extinction de la source. Il existe, des maxima de pression aux encoignures de la pièce et un nœud au centre de celle-ci pour les modes avec m , n ou p impairs.

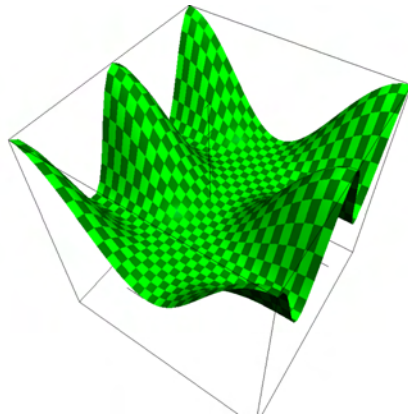
Les graphiques ci-dessous, indiquent la répartition spatiale de la pression quadratique portée par les modes mn , dans un espace à deux dimensions ($x;y$) dans le cas théorique où les parois sont parfaitement rigides.



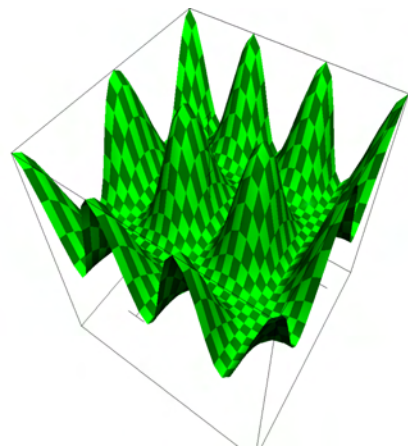
Mode 10



Mode 11



Mode 12

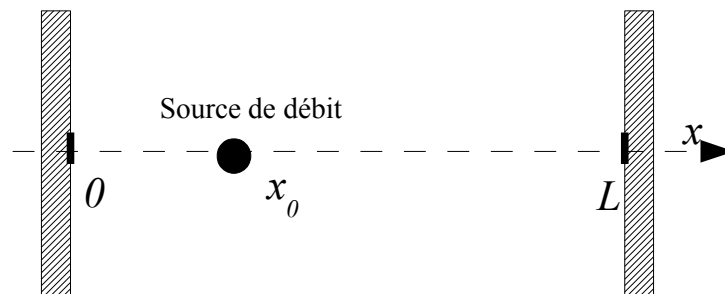


Mode 32

3) Ondes planes stationnaires sur une dimension, avec source

Reprenons la résolution de l'équation des ondes à une dimension en incluant une source sonore ponctuelle de débit unidimensionnel. Il s'agit maintenant d'un problème en **régime forcé**.

Considérons une source harmonique unidimensionnelle de débit Q_0 constant, placée au point d'abscisse x_0 , imposant une pulsation ω . Signalons l'ambiguïté sur l'unité du débit Q_0 ($Q_0 = Sv_0$) puisque le problème est unidimensionnel. En fait, ici Q_0 est un débit par unité de surface c'est-à-dire ayant la dimension d'une vitesse !



En régime harmonique, la solution doit satisfaire à l'**équation de Helmholtz** inhomogène c'est-à-dire avec un second membre (voir annexe C) qui s'écrit en pression, comme suit:

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k_0^2 p(x) = -j\omega\rho_0 q(x)$$

Avec

$$q(x) = Q_0 \delta(x - x_0)$$

Où δ est la **distribution de Dirac** avec :

- $\delta(x - x_0) = 0$ si $x \neq x_0$
- $\delta(x - x_0) = 1$ si $x = x_0$

Ce qui signifie que le débit de la source est nul partout sauf à l'endroit de la source. On utilise la distribution de Dirac pour localiser la source sur l'axe des abscisses.

L'équation de Helmholtz devient avec $\omega = k_0 c_0$:

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k_0^2 p(x) = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \delta(x - x_0) \quad (20)$$

Le problème est identique à celui-ci abordé au chapitre 1 (sans source), à condition bien sûr de conserver la condition de Neumann aux limites du domaine (vitesse nulle sur les parois parfaitement rigides). Il avait été établi que la solution générale (13) était :

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} |\hat{A}_m| \cos(k_m x) \quad \text{avec} \quad k_m = \frac{m\pi}{L}$$

Où l'amplitude complexe $\hat{A}_m$ était une inconnue dépendant du champ initial et par conséquent de la source sonore. L'idée est donc de déterminer cette amplitude complexe, la source étant maintenant parfaitement définie, en injectant la solution générale dans l'équation de Helmholtz inhomogène.

En conservant l'amplitude complexe $\hat{A}_m$ au lieu de son module, la dérivée seconde du champ de pression (13) s'écrit simplement :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}(x)}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \hat{A}_m k_m^2 \cos(k_m x)$$

L'équation (20) devient alors :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \hat{A}_m (k_0^2 - k_m^2) \cos(k_m x) = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \delta(x - x_0) \quad (21)$$

Pour trouver $\hat{A}_m$, on utilise la propriété d'orthogonalité des fonctions cosinus qui satisfont aux conditions aux limites. Dit autrement, on multiplie les deux membres de l'équation (21) par $\cos(k_q x)$ où q est un nombre entier et l'on intègre de 0 à L , en utilisant la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}x\right) dx = \delta_{mq} \sqrt{\frac{L}{2 - \delta_{m0}}} \sqrt{\frac{L}{2 - \delta_{q0}}} \quad (22)$$

Où δ_{mq} est le symbole de **Kronecker** (à ne pas confondre avec la distribution de Dirac) qui signifie

que :

- $\delta_{mq} = 1$ si $m = q$
- $\delta_{mq} = 0$ si $m \neq q$

L'intégration de la relation (22) donne trois résultats différents selon les valeurs des indices m et q :

- $\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2}$ si $m = q > 0$
- $\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}x\right) dx = 0$ si $m \neq q$
- $\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L}x\right) dx = L$ si $m = q = 0$

Le lecteur non familiarisé avec les fonctions orthogonales pourra aisément vérifier les relations ci-dessus par intégration directe.

Il vient donc

$$\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \hat{A}_m (k_0^2 - k_m^2) \cos(k_m x) \cos(k_q x) dx = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \int_0^L \delta(x - x_0) \cos(k_q x) dx$$

Le second membre de cette équation est nul partout sauf en $x = x_0$, on a alors :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \hat{A}_m (k_0^2 - k_m^2) \int_0^L \cos(k_m x) \cos(k_q x) dx = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \cos(k_q x_0)$$

puis dans le premier membre en utilisant la relation d'orthogonalité (22)

$$\frac{L}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{A}_m (k_0^2 - k_m^2) \delta_{mq} = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \cos(k_q x_0)$$

En remarquant que $\sum_{m=1}^{\infty} \hat{A}_m \delta_{mq} = \hat{A}_q \delta_{qq} = \hat{A}_q$ car δ_{mq} est toujours nul sauf pour $m = q$

il vient

$$\frac{\hat{A}_q}{2} L (k_0^2 - k_q^2) = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \cos(k_q x_0)$$

puis

$$\hat{A}_q = \frac{-2jk_0 \rho_0 c_0}{L(k_0^2 - k_q^2)} Q_0 \cos(k_q x_0) \quad (22')$$

Puisque $m = q$, on remplace avantageusement q par l'indice m . Au final, la pression acoustique réelle s'écrit :

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} |\hat{A}_m| \cos(k_m x) \cos(k_m x_0)$$

soit encore en substituant $\hat{A}_m$ par (22') :

$$p(x) = \frac{2\rho_0 c_0}{L} Q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_0}{(k_0^2 - k_m^2)} \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x_0\right) \quad (23)$$

La pulsation imposée ω de la source étant contenue dans la grandeur k_0 :

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad \text{et} \quad k_m = \frac{m\pi}{L}$$

Notons que cette expression donne la pression acoustique pour une pulsation ω imposée et ne représente pas le champ total modal comme pour le régime libre sans source !

Malgré tout, l'expression (23) montre que la pression acoustique prend une valeur infinie à chaque fois que :

$$k_0 \rightarrow k_m,$$

c'est-à-dire quand la pulsation ω de la source est égale à une pulsation propre ω_m . On a alors une résonance sur le nième mode.

Par ailleurs, la présence du terme en $\cos\left(\frac{m\pi}{L} x_0\right)$ dans la solution indique que le champ dépend de la position de la source sur l'axe.

Dans le cas particulier où la source est placée au milieu, en $x_0 = \frac{L}{2}$, tous les termes de la somme



d'indice $m = 1, 3, 5 \dots$ annulent $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)$. Ainsi, tous les modes impairs sont impossibles.

Signalons cependant, que ce cas correspond à une forme mathématique indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Malgré tout, dans la réalité, des phénomènes dissipatifs font que :

$$k_0^2 - k_m^2 \approx 0, \text{ sans jamais être nulle}$$

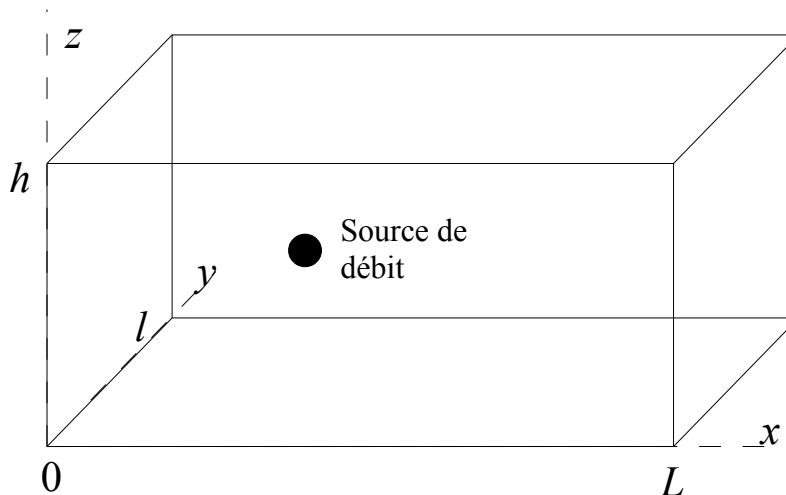
et ainsi le terme nul en cosinus « l'emporte » dans la forme indéterminée.

Les modes propres du problème **avec source** sont identiques à ceux du problème **sans source** mais leur existence est conditionnée par les variables x et x_0 qui peuvent annuler les termes en cosinus. Retenons qu'une source placée sur un nœud d'un mode de pression s'oppose à son existence.

Enfin, signalons la symétrie dans l'expression (23) entre les variables de position x et x_0 . Le champ de pression reste inchangé en permutant la position de la source avec celle du point de réception.

4) Ondes planes stationnaires sur trois dimensions, avec source

Reprenons le problème de la résolution de l'équation des ondes à trois dimensions en incluant maintenant une source sonore ponctuelle de débit omnidirectionnelle.



La source harmonique a un débit Q_0 constant et une pulsation imposée ω . Elle est placée au point de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$. Il s'agit d'un problème en **régime forcé**.

En régime harmonique, la solution doit satisfaire à l'**équation de Helmholtz** inhomogène c'est-à-dire avec un second membre (voir annexe C) qui s'écrit en pression, comme suit:

$$\Delta \hat{p}(\vec{r}) + k_0^2 \hat{p}(\vec{r}) = -j\omega\rho_0 q(\vec{r}) \quad (24)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien et $\vec{r}(x; y; z)$ le vecteur position.

Le débit Q de la source de bruit en régime harmonique s'écrit

$$\hat{Q}(x; y; z; t) = q(x; y; z) e^{j\omega t}$$

avec

$$q(x; y; z) = Q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

Où δ est la **distribution de Dirac**.

Le débit généré par la source est nul partout sauf à l'endroit de la source.

L'équation de Helmholtz (24) devient donc :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + k_0^2 \hat{p} = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \quad (25)$$

avec

$$k_0^2 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad \text{où} \quad \vec{k}_0(k_x; k_y; k_z)$$

On conserve la condition de Neumann aux limites du domaine sur toutes les parois (vitesse nulle sur les parois parfaitement rigides). Il avait été établi que la solution générale était :

$$p(x; y; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |\hat{A}_{mnp}| \cos(k_{mx} x) \cos(k_{ny} y) \cos(k_{pz} z) \quad (26)$$

$$\text{avec} \quad k_{mx} = \frac{m\pi}{L} \quad k_{ny} = \frac{n\pi}{l} \quad \text{et} \quad k_{pz} = \frac{p\pi}{h}$$

Il est d'usage de poser

$$\Psi_{mnp}(x; y; z) = \cos(k_{mx} x) \cos(k_{ny} y) \cos(k_{pz} z)$$

où la Ψ_{mnp} est appelé **fonction propre**. Cette notation n'a pas été utilisée dans les chapitres précédents mais elle est maintenant nécessaire pour alléger l'écriture ! La pression s'écrit avec cette nouvelle convention :

$$p(x; y; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |\hat{A}_{mnp}| \Psi_{mnp}(x; y; z) \quad (26')$$

Les dérivées secondes du champ de pression (26) s'écrivent simplement en conservant l'amplitude complexe $\hat{A}_{mnp}$:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{mnp} k_{mx}^2 \Psi_{mnp}(x; y; z)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{mnp} k_{ny}^2 \Psi_{mnp}(x; y; z)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{mnp} k_{pz}^2 \Psi_{mnp}(x; y; z)$$

En injectant la solution (26') et les dérivées secondes dans l'équation de Helmholtz (25), il vient en posant $k_{mnp}^2 = k_{mx}^2 + k_{ny}^2 + k_{pz}^2$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{mnp} [k_0^2 - k_{mnp}^2] \Psi_{mnp}(x; y; z) = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (27)$$

Pour trouver $\hat{A}_{mnp}$, on utilise la propriété d'orthogonalité des fonctions d'ondes (cosinus) qui satisfont aux conditions aux limites. C'est-à-dire que l'on multiplie les deux membres de l'équation (27) par $\Psi_{qrs}(x; y; z) = \cos(k_{qx}x) \cos(k_{ry}y) \cos(k_{sz}z)$ où q, r et s sont des nombres entiers et l'on intègre sur chaque dimension de l'espace, en utilisant la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^L \int_0^l \int_0^h \Psi_{mnp}(x; y; z) \Psi_{qrs}(x; y; z) dx dy dz = \frac{L}{\sqrt{(2 - \delta_{m0})(2 - \delta_{q0})}} \frac{l}{\sqrt{(2 - \delta_{n0})(2 - \delta_{r0})}} \frac{h}{\sqrt{(2 - \delta_{p0})(2 - \delta_{s0})}} \delta_{mq} \delta_{nr} \delta_{ps} \quad (28)$$

où δ est le symbole de **Kronecker** avec toujours

- $\delta_{mq} = 1$ si $m = q$
- $\delta_{mq} = 0$ si $m \neq q$

Soit

$$\int_0^L \int_0^l \int_0^h \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{mnp} [k_0^2 - k_{mnp}^2] \Psi_{mnp}(x; y; z) \Psi_{qrs}(x; y; z) dx dy dz = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \int_0^L \int_0^l \int_0^h \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \Psi_{qrs}(x; y; z) dx dy dz$$

Le second membre de cette équation est nul partout sauf en $(x_0; y_0; z_0)$, on a alors :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{mnp} [k_0^2 - k_{mnp}^2] \int_0^L \int_0^l \int_0^h \Psi_{mnp}(x; y; z) \Psi_{qrs}(x; y; z) dx dy dz = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \Psi_{qrs}(x_0; y_0; z_0)$$

avec

$$\Psi_{qrs}(x_0; y_0; z_0) = \cos(k_{qx_0} x_0) \cos(k_{ry_0} y_0) \cos(k_{sz_0} z_0)$$

puis dans le premier membre en utilisant la relation d'orthogonalité (28)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{mnp} [k_0^2 - k_{mnp}^2] \frac{L}{\sqrt{(2-\delta_{m0})(2-\delta_{q0})}} \frac{l}{\sqrt{(2-\delta_{m0})(2-\delta_{q0})}} \frac{h}{\sqrt{(2-\delta_{m0})(2-\delta_{q0})}} \delta_{mq} \delta_{nr} \delta_{ps} = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \Psi_{qrs}(x_0, y_0, z_0)$$

On pose

$$A_{mnp} = \frac{L}{\sqrt{(2-\delta_{m0})(2-\delta_{q0})}} \frac{l}{\sqrt{(2-\delta_{m0})(2-\delta_{q0})}} \frac{h}{\sqrt{(2-\delta_{m0})(2-\delta_{q0})}} \delta_{mq} \delta_{nr} \delta_{ps}$$

qui prend trois valeurs suivant les indices :

- $A_{mnp} = \frac{Llh}{8}$ si $m=n=p$
- $A_{mnp} = \frac{Llh}{4}$ si un des indices est nul
- $A_{mnp} = \frac{Llh}{2}$ si deux des indices sont nuls

d'où

$$\hat{A}_{qrs} [k_0^2 - k_{qrs}^2] A_{qrs} = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \Psi_{qrs}(x_0, y_0, z_0)$$

soit encore puisque les indices sont muets:

$$\hat{A}_{mnp} = -jk_0 \rho_0 c_0 Q_0 \frac{\Psi_{mnp}(x_0, y_0, z_0)}{A_{mnp} [k_0^2 - k_{mnp}^2]}$$

Au final, la pression réelle s'écrit d'après (26') :

$$p(x, y, z) = k_0 \rho_0 c_0 Q_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Psi_{mnp}(x, y, z) \Psi_{mnp}(x_0, y_0, z_0)}{A_{mnp} [k_0^2 - k_{mnp}^2]} \quad (29)$$

Avec, en résumé :

- $k_0 = \left(\frac{\omega}{c_0} \right)$
- $k_{mx} = \frac{m\pi}{L} \quad k_{ny} = \frac{n\pi}{l} \quad \text{et} \quad k_{pz} = \frac{p\pi}{h}$
- $k_{mnp}^2 = k_{mx}^2 + k_{ny}^2 + k_{pz}^2$
- $\Psi_{mnp}(x; y; z) = \cos(k_{mx} x) \cos(k_{ny} y) \cos(k_{pz} z)$
- $\Psi_{mnp}(x_0; y_0; z_0) = \cos(k_{mx} x_0) \cos(k_{ny} y_0) \cos(k_{pz} z_0)$

Notons que l'expression (29) donne la pression pour une pulsation ω imposée et ne représente pas le champ total modal comme pour le régime libre sans source !

L'expression (29) montre que la pression prend une valeur infinie à chaque fois que :

$$k_0 \rightarrow k_{mnp},$$

c'est-à-dire quand la pulsation ω de la source est égale une pulsation propre ω_{mnp} . On dit que c'est la résonance sur le nième mode.

Les résonances du problème en **régime forcé** sont identiques aux modes propres du problème **sans source** mais leur existence est liée aux valeurs des variables x, y, z et x_0, y_0, z_0 qui peuvent annuler les fonctions propres Ψ_{mnp} .

Enfin, signalons la symétrie dans l'expression (29) entre les variables de position (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) . Le champ de pression reste inchangé en permutant la position de la source avec celle du point de réception. Ce principe est largement utilisé en pratique lorsqu'il s'agit de déterminer la position optimale d'un caisson de basses dans un petit local. Ce dernier étant généralement lourd et peu mobile, on préfère exciter la pièce en positionnant la source au point d'écoute et en déplaçant le microphone à travers la salle à la recherche de la courbe amplitude-fréquence la plus linéaire possible. Méthode rigoureusement exacte à condition toutefois que toutes les parois aient un comportement assez proche de la condition de Neumann ou à défaut, qu'elles soient sensiblement homogènes.

5) Ondes planes stationnaires sur une dimension, sans source avec matériau absorbant sur les parois

ERRATUM: Francis BROUCHIER, professeur de classe préparatoire à la retraite et passionné d'électroacoustique a eu la gentillesse de relire ce chapitre 5. Il m'a signalé que le mélange des dérivées avec les nombres complexes était source fréquente d'erreur. Les équations indiquant les champs de pression acoustique, dans ce chapitre 5, sont peut être erronées !

On reprend le problème à une dimension sans source (**régime libre**) mais en modifiant les conditions aux limites du domaine. Dans les cas précédemment étudiés, les parois étaient parfaitement réfléchissantes, condition idéale et pratique pour la résolution des problèmes car découlant sur des solutions analytiques. Cependant, la réalité est tout autre et c'est pourquoi, on se propose maintenant d'étudier un cas où l'impédance de la paroi n'est plus infinie, mais complexe. C'est le cas, par exemple, d'une paroi rigide recouverte d'un matériau poreux correspondant à la condition dite d'impédance ou **de Robin** (voir annexe B) qui s'écrit en $x=0$ et en $x=L$ comme suit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} + j\omega\rho_0\hat{\beta}(M;\omega) \right] \hat{p}(M;\omega) = 0 \quad (40)$$

Où n est la composante du vecteur unitaire normal à la surface et $\hat{\beta}$ l'admittance spécifique réduite de la paroi supposée homogène.



On avait montré que la solution (9) à l'équation des ondes était :

$$\hat{p}(x;t) = [\hat{A} \cos(kx) + \hat{B} \sin(kx)] e^{j\omega t} \quad (9)$$

Nous devons donc déterminer les coefficients $\hat{A}$ et $\hat{B}$ à partir des conditions aux limites du domaine imposées par la relation (40) en $x=0$ et $x=L$

En $x=0$, on a $\vec{n} = -\vec{e}_x$, où $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses. Par conséquent, la condition aux limites s'écrit :

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x} + jk \hat{\beta}(M; \omega) \right]_{x=0} \hat{p}(M; \omega) = 0 \quad (41)$$

Il vient aisément en appliquant directement la relation (41) avec la solution (9) que :

$$-\hat{B} + j \hat{\beta} \hat{A} = 0$$

avec $\omega = k c_0$, il vient :

$$\hat{B} = j \hat{\beta} \hat{A}$$

La pression s'écrit donc en fonction de l'admittance $\hat{\beta}$ comme suit :

$$\hat{p}(x; t) = \hat{A} [\cos(kx) + j \hat{\beta} \sin(kx)] e^{j\omega t} \quad (43)$$

En $x = L$, on a $\vec{n} = \vec{e}_x$, la condition au limite s'écrit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + j\omega \rho_0 \hat{\beta}(M; \omega) \right]_{x=L} \hat{p}(M; \omega) = 0$$

Soit encore,

$$-k \sin(kL) + jk \hat{\beta} \cos(kL) + jk \hat{\beta} [\cos(kL) + j \hat{\beta} \sin(kL)] = 0$$

Puis en simplifiant par k et en divisant cette dernière expression par $\cos(kL)$, il vient après réarrangement que :

$$\tan(\hat{k} L) = \frac{2j \hat{\beta}}{1 + \hat{\beta}^2} \quad (44)$$

Le nombre d'onde k doit être solution de cette dernière équation dont le second membre est complexe (l'admittance $\hat{\beta}$ est aussi par hypothèse une grandeur complexe). En contre-coup, le nombre d'onde $\hat{k}$ qui satisfait les conditions aux limites est également une grandeur complexe (voir annexe D).

Notons que dans le cas particulier où l'impédance de la paroi est infinie (condition de Neumann) c'est-à-dire d'admittance β nulle, le second membre de l'équation (44) est nul et la condition aux limites devient :

$$\tan(kL) = 0$$

dont les solutions sont

$$k_m = \frac{m\pi}{L} \quad \text{avec } m = 0, 1, 2 \dots$$

Nous retrouvons, et c'est heureux, les nombres d'ondes propres satisfaisant à la condition de Neumann établie au chapitre 1.

Dans la suite de l'exposé, on notera :

$$\hat{k} = k_r + jk_\kappa$$

où k_r et k_κ sont respectivement les parties, réelle et imaginaire du nombre d'onde.

et

$$\hat{\beta} = \beta_r + j\beta_\kappa$$

où β_r et β_κ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de l'admittance spécifique réduite.

Considérons maintenant, le cas peu probable où $\hat{\beta}$ est indépendant de la pulsation ω et étudions trois situations distinctes selon la nature de l'admittance $\hat{\beta}$.

- Si l'admittance est **imaginaire pure** $\hat{\beta} = j\beta_\kappa$, la condition (44) devient :

$$\tan(kL) = \frac{2\beta_\kappa}{\beta_\kappa^2 - 1} \quad (45)$$

Le second membre de (45) est réel. Dans ce cas particulier, les nombres d'ondes propres sont donnés simplement par :

$$k_m = \frac{1}{L} \arctan\left(\frac{2\beta_\kappa}{\beta_\kappa^2 - 1}\right) + \frac{m\pi}{L} \quad \text{avec } m = 0, 1, 2 \dots$$

Les nombres d'ondes sont décalés de $\frac{1}{L} \arctan\left(\frac{2\beta_\kappa}{\beta_\kappa^2 - 1}\right)$ par rapport à ceux qui seraient obtenus avec la condition de Neumann.

Les pulsations et fréquences propres sont alors données par :

$$\omega_m = \frac{c_0}{L} \arctan\left(\frac{2\beta_\kappa}{\beta_\kappa^2 - 1}\right) + \frac{m\pi c_0}{L}$$

$$f_m = \frac{c_0}{2\pi L} \arctan\left(\frac{2\beta_\kappa}{\beta_\kappa^2 - 1}\right) + \frac{mc_0}{2L}$$

La pression portée par un mode s'écrit d'après (43):

$$\hat{p}_m(x; t) = \hat{A}_m [\cos(k_m x) - \beta_\kappa \sin(k_m x)] e^{j\omega_m t}$$

Il n'apparaît pas dans cette dernière expression de termes dissipatifs, la pulsation ω_m étant réelle.

Lorsque l'admittance est imaginaire pure la paroi est réactive. La pression p et la vitesse v sont en quadrature de phase contre la paroi.

En effet,

$$\hat{\beta} = j\beta_\kappa = \rho_0 c_0 \frac{\hat{v}}{\hat{p}} = \beta_\kappa e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{si } \beta_\kappa > 0$$

et

$$\hat{\beta} = j \beta_x = \rho_0 c_0 \frac{\hat{v}}{\hat{p}} = |\beta_x| e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \text{si } \beta_x < 0$$

Toute l'énergie reçue par la paroi est réémise avec un certain retard. Par analogie avec un système mécanique, la paroi se comporte comme un ressort (avec ou sans masse) où l'énergie est emmagasinée sous forme d'énergie cinétique ou potentielle puis restituée au milieu extérieur. On pourrait évoquer la mise en vibration de la paroi sous l'effet de l'onde de pression incidente. Mais dans notre situation, la condition de Robin est en contradiction avec cette description car elle impose par hypothèse une vitesse nulle de la paroi, $W = 0$ (voir annexe B)! En toute rigueur, il faudrait reprendre les conditions aux limites avec $W \neq 0$, ce qui de facto entraîne une prise en compte du couplage fluide-structure non considéré jusqu'alors. Les équations suivantes sont donc assez formelles mais elles permettent cependant une première approche simple des phénomènes.

La pression totale en un point d'abscisse x , exprimée après extinction de la source, s'écrit comme la somme des pressions partielles « modales », soit :

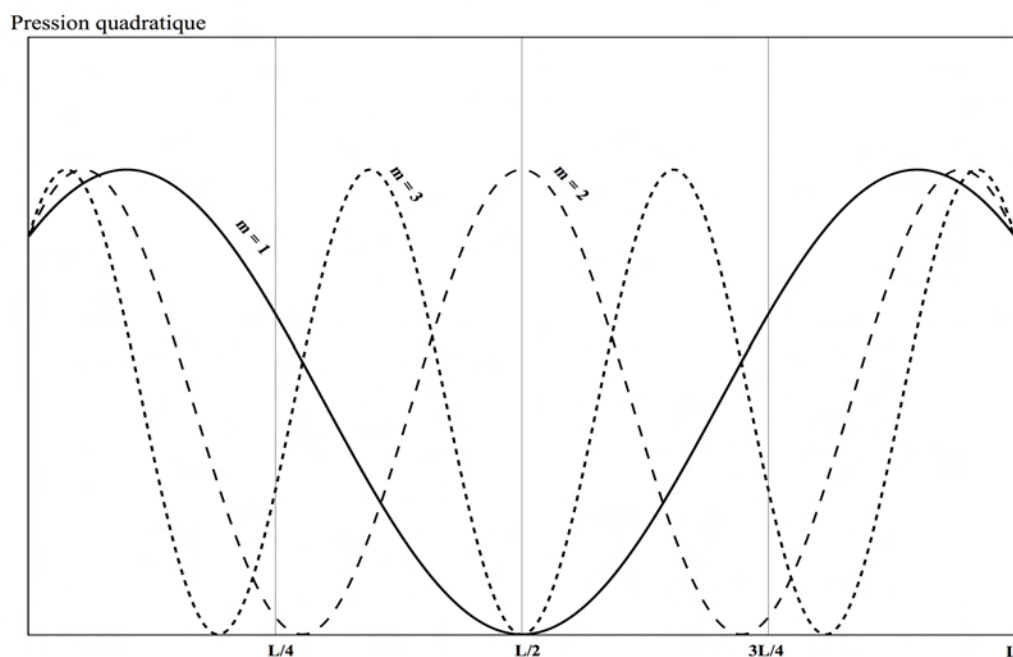
$$p(x; t) = \sum_{m=0}^{\infty} |\hat{A}_m| [\cos(k_m x) - \beta_x \sin(k_m x)] \cos(\omega_m t + \varphi_m)$$

Remarquons que si $\beta_x \rightarrow 0$, on retrouve l'expression du champ de pression satisfaisant à la condition de Neumann.

Le tableau ci-dessous indique les trois premières fréquences propres, avec $L = 4 \text{ m}$, dans la condition d'admittance imaginaire pure et celle de Neumann.

Modes	Fréquences propres	
m	$\beta_x = -0,1$	$\beta = 0$ (Neumann)
1	45,2 Hz	42,5 Hz
2	87,2 Hz	85 Hz
3	130,2 Hz	127,5 Hz

Le graphique suivant montre les pressions quadratiques des trois premiers modes en fonction de la position x .



On observe, notamment, que contre les parois la pression n'est plus maximum et que les nœuds du mode $m = 2$ ne sont plus situés au quart et au trois quarts de la longueur comme pour la configuration concernée par la condition de Neumann. Cependant, à mi-longueur la pression s'annule toujours pour les modes impairs.

- Si l'admittance est réelle $\beta = \beta_r$, l'équation (44) devient :

$$\tan(\hat{k}L) = \frac{2j\beta_r}{1 + \beta_r^2} \quad (46)$$

Le second membre de (46) est imaginaire.

En posant $\hat{k}L = k_rL + jk_xL$, d'après l'annexe D, la tangente s'exprime :

$$\tan(k_rL + jk_xL) = \frac{\sin(k_rL) \operatorname{ch}(k_xL) + j \cos(k_rL) \operatorname{sh}(k_xL)}{\cos(k_rL) \operatorname{ch}(k_xL) - j \sin(k_rL) \operatorname{sh}(k_xL)}$$

Soit encore en multipliant le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur, il vient :

$$\tan(k_rL + jk_xL) = \frac{\sin(k_rL) \cos(k_rL) [\operatorname{ch}^2(k_xL) - \operatorname{sh}^2(k_xL)] + j \operatorname{ch}(k_xL) \operatorname{sh}(k_xL)}{[\cos(k_rL) \operatorname{ch}(k_xL)]^2 + [\sin(k_rL) \operatorname{sh}(k_xL)]^2}$$

En se rappelant que $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$, l'équation (46) s'écrit au final :

$$\frac{\sin(k_rL) \cos(k_rL) + j \operatorname{ch}(k_xL) \operatorname{sh}(k_xL)}{[\cos(k_rL) \operatorname{ch}(k_xL)]^2 + [\sin(k_rL) \operatorname{sh}(k_xL)]^2} = \frac{2j\beta_r}{1 + \beta_r^2}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires du premier membre avec le second membre, il vient :

$$\frac{\sin(k_rL) \cos(k_rL)}{[\cos(k_rL) \operatorname{ch}(k_xL)]^2 + [\sin(k_rL) \operatorname{sh}(k_xL)]^2} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\operatorname{ch}(k_xL) \operatorname{sh}(k_xL)}{[\cos(k_rL) \operatorname{ch}(k_xL)]^2 + [\sin(k_rL) \operatorname{sh}(k_xL)]^2} = \frac{2\beta_r}{1 + \beta_r^2} \quad (48)$$

L'équation (47), implique forcément que :

$$\sin(k_rL) \cos(k_rL) = \frac{1}{2} \sin(2k_rL) = 0$$

d'où

$$k_{rm} = \frac{m\pi}{2L} \quad \text{avec } m = 0, 1, 2 \dots$$

Dans l'équation (48), on remarque que :

- si m est pair le terme en $\sin(a)$ s'annule et il vient aisément :

$$th(k_x L) = \frac{2\beta_r}{1+\beta_r^2} \quad (48)$$

- si m est impair le terme en $\cos(a)$ s'annule et il vient de même :

$$th(k_x L) = \frac{1+\beta_r^2}{2\beta_r} \quad (49)$$

Comme $-1 < th(x) < 1$ et en supposant que $\beta_r > 0$, il s'ensuit que l'une ou l'autre des équations, (48) ou (49), sera impossible à résoudre.

L'équation (48) n'a des solutions que si

$$\frac{2\beta_r}{1+\beta_r^2} < 1$$

Condition toujours vérifiée quelque soit $\beta_r \neq 1$

d'où

$$\frac{1+\beta_r^2}{2\beta_r} > 1$$

donc l'équation (49) n'a pas de solution, ce qui impose nécessairement que m soit pair pour que $k_x L$ existe.

En conséquence

$$k_x = \frac{1}{L} \operatorname{Arc th} \left(\frac{2\beta_r}{1+\beta_r^2} \right)$$

Au final, les nombres, pulsations et fréquences propres sont donnés en posant $m = 2p$ avec p entier car l'indice m est obligatoirement pair, par :

$$\begin{aligned} \hat{k}_p &= k_{rp} + jk_x = \frac{p\pi}{L} + j \frac{1}{L} \operatorname{Arc th} \left(\frac{2\beta_r}{1+\beta_r^2} \right) \\ \hat{\omega}_p &= \omega_{rp} + j\lambda = \frac{p\pi c_0}{L} + j \frac{c_0}{L} \operatorname{Arc th} \left(\frac{2\beta_r}{1+\beta_r^2} \right) \quad (51) \\ \hat{f}_p &= f_{rp} + jf_x = \frac{pc_0}{2L} + j \frac{c_0}{2\pi L} \operatorname{Arc th} \left(\frac{2\beta_r}{1+\beta_r^2} \right) \end{aligned}$$

Les parties réelles sont identiques à celles qui seraient obtenues avec la condition de Neumann.

En réintroduisant l'indice m afin de conserver les mêmes conventions d'écriture, la pression acoustique portée par un mode s'écrit d'après (43):

$$\hat{p}_m(x; t) = \hat{A}_m [\cos(\hat{k}_m x) + j\beta_r \sin(\hat{k}_m x)] e^{j\hat{\omega}_m t}$$

qui s'écrit encore en substituant la pulsation par sa forme $\hat{\omega}_m = \omega_{rm} + j\lambda$

$$\hat{p}_m(x; t) = \hat{A}_m [\cos(\hat{k}_m x) + j\beta_r \sin(\hat{k}_m x)] e^{-\lambda t} e^{j\omega_{rm} t} \quad (52)$$

Le terme réel $e^{-\lambda t}$, dans cette dernière expression, traduit la décroissance de l'amplitude de l'onde stationnaire après arrêt de la source sonore. La **partie imaginaire λ** de la pulsation, dans le cas présent indépendante de m , est un **coefficient d'amortissement**. Pour cela, il faut nécessairement que $\lambda > 0$ ce qui confirme l'hypothèse initiale $\beta_r > 0$.

Une paroi d'admittance réelle est purement résistive, il n'y a pas d'effet d'inertie, ni d'effet d'élasticité et l'analogie mécanique est un amortisseur sans masse. La pression est en phase avec la vitesse particulière sur la paroi puisque β est réel.

$\hat{k}_m$ étant une grandeur complexe, la pression acoustique (52) peut s'écrire en faisant usage des relations « trigonométriques » indiquées dans l'annexe D :

$$\hat{p}_m(x; t) = \hat{A}_m \cos(k_{rm}x) [ch(k_x x) - \beta_r sh(k_x x)] e^{-\lambda t} e^{j\omega_m t} + j \hat{A}_m \sin(k_{rm}x) [\beta_r ch(k_x x) - sh(k_x x)] e^{-\lambda t} e^{j\omega_m t}$$

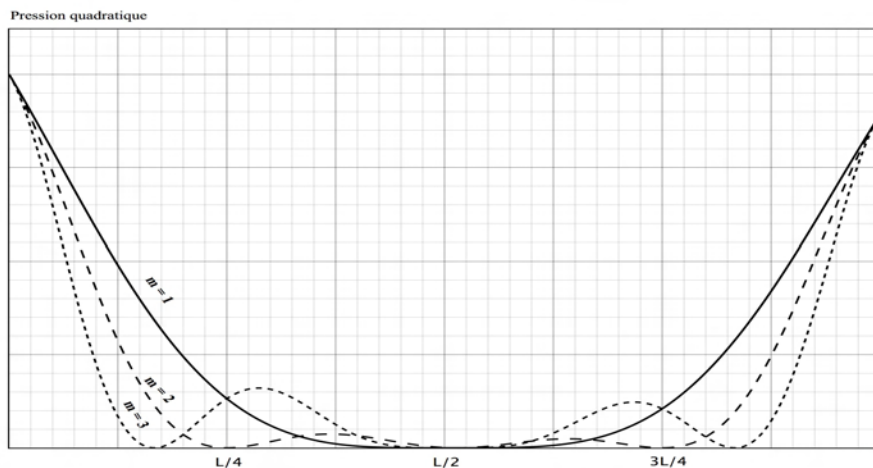
Le champ réel porté par le mode m s'écrit encore

$$p_m(x; t) = \Re[\hat{p}_m(x; t)] = |\hat{A}_m| \left[\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) [ch(k_x x) - \beta_r sh(k_x x)] \right] \cos(\omega_m t + \varphi_m) e^{-\lambda t}$$

La pression réelle totale en un point d'abscisse x , exprimée après extinction de la source, s'écrit comme la somme des pressions portées par tous les modes m , soit :

$$p_m(x; t) = \sum_{m=0}^{\infty} |\hat{A}_m| \left[\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) [ch(k_x x) - \beta_r sh(k_x x)] \right] \cos(\omega_m t + \varphi_m) e^{-\lambda t}$$

Les pressions quadratiques, prises à l'instant initial, des trois premiers modes en fonction de la position x figurent sur le graphique suivant pour β_r pris arbitrairement à 2 (coefficient d'absorption sous incidence normale $\alpha_0 = 0,89$):



L'allure des courbes est un peu étranges ! Néanmoins, ce cas de figure où la paroi est purement passive est encore plus théorique que le cas précédent. On imagine intuitivement que la pression acoustique soit fortement diminuée lorsque les parois se comportent comme des amortisseurs purs. Néanmoins, tous les modes présentent une pression acoustique importante à proximité des parois. À moins que l'auteur ait fait une erreur de calcul ou de raisonnement !

On peut exprimer la durée de la décroissance énergétique d'un mode sur la dimension x , notée Δt , en fonction du coefficient d'amortissement λ , en écrivant la pression à l'instant t en fonction de la pression à l'instant initial $t=0$ par exemple, correspond à la date d'extinction de la source :

$$p_m(t) = p_m(0) e^{-\lambda t}$$

puis en élevant au carré pour exprimer les pressions quadratiques:

$$p_m^2(t) = p_m^2(0) e^{-2\lambda t}$$

En définissant la durée de la décroissance énergétique d'un mode sur 60 dB, afin de pouvoir la comparer à la durée de réverbération, il vient :

$$10 \log \frac{p_m^2(t)}{p_m^2(0)} = 10 \log e^{-2\lambda \Delta t} = -60 \text{ dB}$$

Soit après un bref calcul :

$$\Delta t_{-60 \text{ dB}} = \frac{6,9}{\lambda}$$

Dans le cas présent avec $\beta r = 2$, on trouve $k_x = 0,275$, $\lambda = 93,5$ et $\Delta t_{-60 \text{ dB}} = 0,07 \text{ s}$

- Si l'admittance est **quelconque** $\beta = \beta_r + j\beta_x$:

Cette configuration est certainement celle ayant le plus d'intérêt pratique. On reprend l'idée émise en début de chapitre où l'on suppose qu'un matelas de matériau poreux est appuyé contre un mur parfaitement rigide et immobile. Le calcul de l'impédance acoustique à l'interface air-matériau a été explicité dans l'exposé « Alpha Sabine » où il était fait usage, notamment, des modèles de **Delany & Basley** ainsi que de la formule de l'impédance ramenée.

Avec $\hat{\beta} = \beta_r + j\beta_x$, la condition (44) s'écrit tout calcul fait :

$$\tan(\hat{k}L) = \frac{4\beta_r^2\beta_x - 2\beta_x(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2) + 2j\beta_r(1 + \beta_r^2 + \beta_x^2)}{(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)^2 + 4\beta_r^2\beta_x^2} \quad (53)$$

On admettra que pour une laine minérale d'épaisseur 100 mm devant un support rigide, la valeur de l'admittance spécifique réduite vaut :

$$\hat{\beta} = 0,02 + 0,18j$$

Pour information, le calcul de l'admittance spécifique réduite a été effectué ici pour une fréquence de 80 Hz avec une laine minérale dont la résistivité à l'écoulement de l'air est de 5000 Pa.s/m². Le coefficient d'absorption sous incidence normale vaut à cette fréquence $\alpha_0 = 0,07$.

En posant toujours $\hat{k} = k_r + jk_x$ et d'après l'annexe D, l'équation (53) devient :

$$\frac{\sin(k_r L) \cos(k_r L) + j \cosh(k_x L) \sinh(k_x L)}{[\cos(k_r L) \cosh(k_x L)]^2 + [\sin(k_r L) \sinh(k_x L)]^2} = \frac{4\beta_r^2\beta_x - 2\beta_x(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2) + 2j\beta_r(1 + \beta_r^2 + \beta_x^2)}{(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)^2 + 4\beta_r^2\beta_x^2} \quad (54)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires du premier membre avec le second membre, on a :

$$\frac{\sin(k_r L) \cos(k_r L)}{[\cos(k_r L) \cosh(k_x L)]^2 + [\sin(k_r L) \sinh(k_x L)]^2} = \frac{4\beta_r^2\beta_x - 2\beta_x(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)}{(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)^2 + 4\beta_r^2\beta_x^2} \quad (55)$$

et

$$\frac{\cosh(k_x L) \sinh(k_x L)}{[\cos(k_r L) \cosh(k_x L)]^2 + [\sin(k_r L) \sinh(k_x L)]^2} = \frac{2\beta_r(1 + \beta_r^2 + \beta_x^2)}{(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)^2 + 4\beta_r^2\beta_x^2} \quad (56)$$

La résolution de ce système d'équations non linéaires donnera les valeurs discrètes des nombres d'ondes et pulsations propres du champ de pression. Le recours à un outil numérique pour rechercher les couples solutions $(k_r; k_x)$ serait utile ! Cependant, en supposant $k_x L \ll 1$ les fonctions hyperboliques peuvent être substituées par leur développement limité au premier ordre, soit :

$$ch(k_x L) \approx 1 \quad \text{et} \quad sh(k_x L) \approx k_x L$$

Il vient aisément en divisant (55) avec (56) :

$$\frac{\sin(k_r L) \cos(k_r L)}{k_x L} \approx \frac{4 \beta_r^2 \beta_x - 2 \beta_x (1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)}{2 \beta_r (1 + \beta_r^2 + \beta_x^2)}$$

puis en posant $C = \frac{4 \beta_r^2 \beta_x - 2 \beta_x (1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)}{2 \beta_r (1 + \beta_r^2 + \beta_x^2)}$

il vient

$$k_x L \approx \frac{\sin(k_r L) \cos(k_r L)}{C} \quad (57)$$

En substituant $k_x L$ par cette dernière expression dans (55), il vient :

$$\frac{\sin(k_r L) \cos(k_r L)}{\cos^2(k_r L) + \frac{\sin^4(k_r L) \cos^2(k_r L)}{C^2}} = \frac{4 \beta_r^2 \beta_x - 2 \beta_x (1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)}{(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)^2 + 4 \beta_r^2 \beta_x^2} \quad (58)$$

On peut supposer que la solution de cette dernière équation est assez proche de celle qui serait obtenue avec la condition de Neumann, c'est-à-dire que $k_{mr} L \approx m\pi$

Il découle de cet hypothèse que $\cos^2(k_r L) \gg \sin^4(k_r L) \cos^2(k_r L)$ et à plus forte raison que $\cos^2(k_r L) \gg \frac{\sin^4(k_r L) \cos^2(k_r L)}{K^2}$

Au final, l'équation (58) se simplifie pour devenir:

$$\frac{\sin(k_r L) \cos(k_r L)}{\cos^2(k_r L)} = \tan(k_r L) \approx \frac{4 \beta_r^2 \beta_x - 2 \beta_x (1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)}{(1 + \beta_r^2 - \beta_x^2)^2 + 4 \beta_r^2 \beta_x^2} \quad (59)$$

dont les solutions sont données simplement par :

$$k_{rm} \approx \frac{1}{L} \arctan\left(\frac{4\beta_r^2\beta_x - 2\beta_x(1+\beta_r^2-\beta_x^2)}{(1+\beta_r^2-\beta_x^2)^2 + 4\beta_r^2\beta_x^2}\right) + \frac{m\pi}{L} \quad \text{avec } m = 0, 1, 2 \dots$$

et d'après (57), on a donc :

$$k_{xm} \approx \frac{\sin(2k_{rm}L)}{2LC}$$

avec

$$C = \frac{4\beta_r^2\beta_x - 2\beta_x(1+\beta_r^2-\beta_x^2)}{2\beta_r(1+\beta_r^2+\beta_x^2)}$$

Par voie de conséquence, avec $\hat{\omega}_m = \omega_{rm} + j\lambda$, la **pulsation propre** ω_{rm} de détermine d'après :

$$\omega_{rm} \approx \frac{c_0}{L} \arctan\left(\frac{4\beta_r^2\beta_x - 2\beta_x(1+\beta_r^2-\beta_x^2)}{(1+\beta_r^2-\beta_x^2)^2 + 4\beta_r^2\beta_x^2}\right) + \frac{m\pi c_0}{L}$$

et le **coefficient d'amortissement** λ :

$$\lambda \approx \frac{c_0 \sin(2k_{rm}L)}{2LC}$$

Considérons l'exemple numérique ci-dessous, où une laine minérale d'épaisseur 100 mm est posée devant un support rigide. Dans ce cas, la valeur de l'admittance spécifique réduite vaut :

$$\hat{\beta} = 0,02 + 0,18j$$

Pour information, le calcul de l'admittance spécifique réduite a été effectué pour une fréquence de 80 Hz avec une laine minérale dont la résistivité à l'écoulement de l'air est de 5000 Pa.s/m². Le coefficient d'absorption sous incidence normale vaut à cette fréquence $\alpha_0 = 0,07$.

Le tableau ci-contre résume les résultats pour les deux premiers modes :

m	Avec $\beta_r=0,02$ et $\beta_x=0,18$ et $L=4\text{ m}$				
	k_{rm}	k_x	λ	f_r	Neumann*
0	-0,0890	0,0096	3,26	-4,8 Hz	0 Hz
1	0,6960	0,0097	3,30	37,7 Hz	40,5 Hz
2	1,4820	0,0091	3,09	80,2 Hz	81 Hz

* On suppose ici que la distance entre les deux parois rigides est de 4,20 m. Avec la condition aux limites de Neumann, les fréquences propres se calculent avec $L = 4,20\text{ m}$. Mais en disposant de 100 mm de laine minérale sur chaque paroi, la distance L à prendre en considération dans les calculs est 4,00 m. Il faut ôter l'épaisseur de la laine minérale sur la longueur totale car les limites du domaine sont matérialisées par l'interface air-matériau, l'admittance réduite $\hat{\beta}$ ayant été calculée sur la surface de la laine minérale. Une comparaison des fréquences propres dans la condition d'admittance quelconque avec celle de Neumann, à distance L égale, indiquerait des valeurs un peu plus éloignées que ne le montre le tableau ci-dessus, au moins pour cette configuration.

Notons que l'admittance est une fonction de la pulsation ! Dans cet exemple, $\hat{\beta}$ a été calculé pour une fréquence de 80 Hz soit une valeur quasi-identique à la fréquence propre du second mode. Le coefficient d'amortissement λ de 3,09 n'est strictement valable que pour le second mode. Or le coefficient d'amortissement augmente généralement avec l'indice m des modes, l'absorption d'un matériau poreux étant généralement croissante avec la fréquence.

En toute rigueur, il faudrait procéder aux calculs des nombres et pulsations propres pour chaque indice m en ayant anticipé, au plus juste, l'expression de $\hat{\beta}$ et en procédant, au besoin, par itérations successives.

Enfin dans un espace à trois dimensions le problème devient éminemment plus compliqué car $\hat{\beta}$ est aussi fonction de l'angle d'incidence ! On conçoit qu'un calcul rigoureux des fréquences propres et des coefficients d'amortissement pour les modes obliques et tangentiels devienne alors problématique. Malgré tout, les modes obliques et tangentiels décroissent plus vite que les modes axiaux car ils bénéficient de plus de « rebond » et sous une incidence oblique, qui favorisent, sauf incidence rasante, leur atténuation.

En pratique, on s'attache surtout à réduire les premiers modes axiaux ce qui simplifie, bien évidemment la tâche du praticien!

La durée de la décroissance énergétique est toujours donnée par :

$$\Delta t_{-60\text{ dB}} = \frac{6,9}{\lambda}$$

Pour le second mode $m = 2$, avec $\lambda = 3,09$, il vient que $\Delta t_{-60\text{ dB}} = 2,23\text{ s}$.

Signalons que la durée de la décroissance du mode peut également se calculer en fonction du coefficient d'absorption du matériau et à partir de la formule du temps de réverbération d'Eyring, dans laquelle le libre parcours moyen de Jaeger ($4V/S$) est substitué par la longueur L . Dans ce cas, la formule d'Eyring s'écrit (voir <http://www.conseils-acoustique.com/images/articles/formeyring.pdf>) :

$$\Delta t_{-60\text{ dB}} = \frac{6L}{-c \log(1 - \alpha_0)}$$

α_0 étant le coefficient d'absorption sous incidence normale du matériau.

Avec $\alpha_0 = 0,07$ et $L = 4\text{ m}$, on retrouve bien $\Delta t_{-60\text{ dB}} = 2,23\text{ s}$.

En pratique, il convient de comparer la décroissance énergétique des modes les plus marqués avec la durée de réverbération du local.

La pression acoustique portée par un mode s'écrit d'après (43):

$$\hat{p}_m(x; t) = \hat{A}_m [\cos(\hat{k}_m x) + j \hat{\beta} \sin(\hat{k}_m x)] e^{j \hat{\omega}_m t}$$

qui s'écrit encore avec $\hat{\omega}_m = \omega_{rm} + j \lambda_m$

$$\hat{p}_m(x; t) = \hat{A}_m [\cos(\hat{k}_m x) + j \hat{\beta} \sin(\hat{k}_m x)] e^{-\lambda_m t} e^{j \omega_{rm} t} \quad (60)$$

où

$$\hat{\beta} = \beta_r + j \beta_x \quad \text{et} \quad \hat{k}_m = k_{rm} + j k_{x}$$

$$\cos(\hat{k}_m x) = \cos((k_{rm} + j k_x) x) = \cos(k_{rm} x) \operatorname{ch}(k_x x) - j \sin(k_{rm} x) \operatorname{sh}(k_x x) \quad (\text{voir Annexe D})$$

$$\sin(\hat{k}_m x) = \sin((k_{rm} + j k_x) x) = \sin(k_{rm} x) \operatorname{ch}(k_x x) + j \cos(k_{rm} x) \operatorname{sh}(k_x x) \quad (\text{voir annexe D})$$

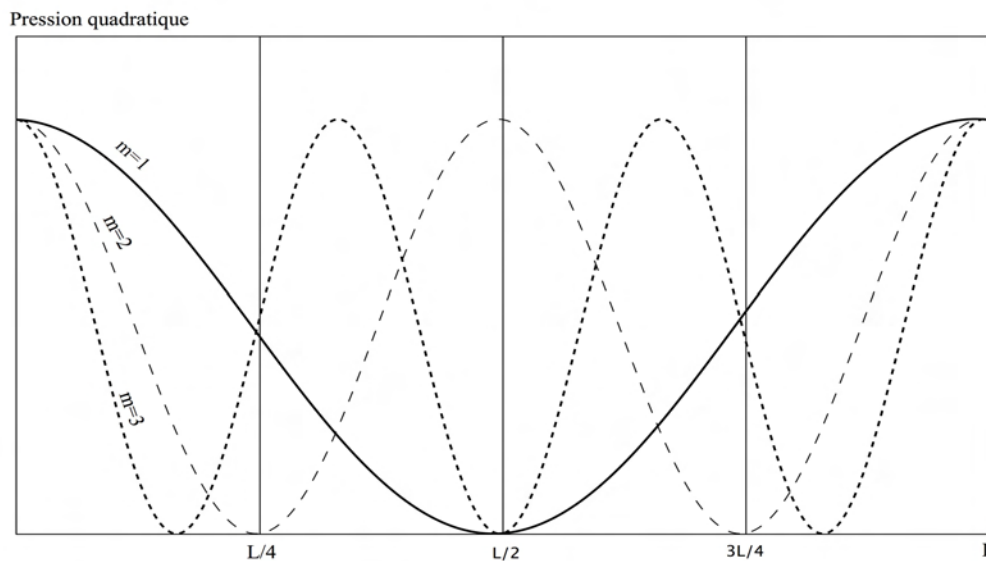
La pression acoustique réelle portée par un mode est donnée par $p_m(x; t) = \Re[\hat{p}_m(x; t)]$, soit :

$$p_m(x; t) = |\hat{A}_m| [\cos(k_{rm}x) [ch(k_{\kappa}x) - \beta_{\kappa} sh(k_{\kappa}x)] - \beta_r \sin(k_{rm}x) ch(k_{\kappa}x)] \cos(\omega_{rm}t + \varphi_m) e^{-\lambda_m t} \quad (61)$$

La pression totale en un point d'abscisse x , exprimée après extinction de la source, s'écrit comme la somme des pressions partielles « modales », soit :

$$p(x; t) = \sum_{m=0}^{\infty} |\hat{A}_m| [\cos(k_{rm}x) [ch(k_{\kappa}x) - \beta_{\kappa} sh(k_{\kappa}x)] - \beta_r \sin(k_{rm}x) ch(k_{\kappa}x)] \cos(\omega_{rm}t + \varphi_m) e^{-\lambda_m t}$$

Les pressions quadratiques, prises à l'instant initial, des trois premiers modes en fonction de la position x figurent sur le graphique suivant pour $\hat{\beta} = 0,02 + 0,18j$:



La répartition des modes est quasi-similaire à celle qui serait obtenue avec les conditions aux limites de Neumann (voir chapitre 1). Évidemment, 100 mm de laine minérale posée sur une paroi rigide est bien peu de chose devant les longueurs d'ondes intervenant dans le problème !

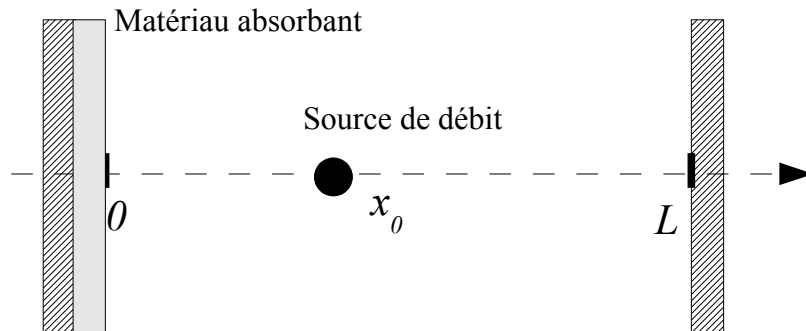
Le tableau suivant indique les expressions des admittances spécifiques réduites en fonction de l'épaisseur de la laine de minérale, sous incidence normale, pour deux fréquences. Le lecteur soucieux d'étudier les conséquences de l'épaisseur du matériau poreux sur le champ de pression acoustique pourra ainsi effectuer les calculs et comparer les résultats.

Épaisseur de la laine minérale	Fréquences	
	50 Hz	80 Hz
200 mm	$\hat{\beta} = 0,04 + 0,22 j$	$\hat{\beta} = 0,12 + 0,35 j$
300 mm	$\hat{\beta} = 0,12 + 0,29 j$	$\hat{\beta} = 0,28 + 0,33 j$
400 mm	$\hat{\beta} = 0,22 + 0,28 j$	$\hat{\beta} = 0,36 + 0,28 j$
800 mm	$\hat{\beta} = 0,23 + 0,21 j$	$\hat{\beta} = 0,30 + 0,22 j$

6) Ondes planes stationnaires sur une dimension, avec source et matériau absorbant sur une paroi

Reprenons le problème du chapitre 3) à une dimension, incluant une source sonore ponctuelle de débit unidimensionnel de débit Q_0 constant, placée au point d'abscisse x_0 , imposant une pulsation ω . Disposons, sur l'une des deux parois rigide et immobile, un matériau absorbant d'admittance acoustique spécifique réduite β .

Dans le cas présent, il est aisé d'utiliser le formalisme intégral dont la démarche calculatoire est résumée annexe E.



Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

- Parois rigide et immobile, soit une vitesse de paroi nulle en $x = 0$ et $x = L$, c'est-à-dire $W_0 = W_L = 0$
- Admittance β_0 complexe quelconque en $x = 0$
- Admittance β_L nulle en $x = L$ (condition de Neumann, paroi d'impédance infinie)
- Source de débit de la forme : $q(x') = Q_0 \delta(x' - x_0)$ où Q_0 à la dimension d'une vitesse (problème unidimensionnel).

Le potentiel des vitesses est donné par l'équation intégrale 1D, soit :

$$\varphi(x) = \int_0^L G(x; x') q(x') dx' + [W_L G(x; L) - W_0 G(x; 0)] \quad (62)$$

Avec $W_0 = W_L = 0$, il vient:

$$\varphi(x) = \int_0^L G(x; x') q(x') dx' \quad (63)$$

La fonction de Green 1D, sous sa forme générale, s'écrit :

$$G(x; x') = \frac{[\cos(kx') + j\beta_0 \sin(kx')][\cos(k(L-x)) + j\beta_L \sin(k(L-x))]}{k(j\beta_L \cos(kL) - \sin(kL)) + j\beta_0 k(\cos(kL) + j\beta_L \sin(kL))} \quad \text{pour } 0 < x' < x$$

et

$$G(x; x') = \frac{[\cos(kx) + j\beta_0 \sin(kx)][\cos(k(L-x')) + j\beta_L \sin(k(L-x'))]}{k(j\beta_L \cos(kL) - \sin(kL)) + j\beta_0 k(\cos(kL) + j\beta_L \sin(kL))} \quad \text{pour } 0 < x < x'$$

avec $\beta_L = 0$, elle devient :

$$G(x; x') = \frac{[\cos(kx') + j\beta_0 \sin(kx')][\cos(k(L-x))]}{-k \sin(kL) + j\beta_0 k(\cos(kL))} \quad \text{pour } 0 < x' < x$$

et

$$G(x; x') = \frac{[\cos(kx') + j\beta_0 \sin(kx')][\cos(k(L-x))]}{-k \sin(kL) + j\beta_0 k(\cos(kL))} \quad \text{pour } 0 < x < x'$$

Le potentiel des vitesses se détermine alors d'après (63) par :

$$\varphi(x) = \int_0^L \frac{[\cos(kx') + j\beta_0 \sin(kx')][\cos(k(L-x))]}{-k \sin(kL) + j\beta_0 k(\cos(kL))} Q_0 \delta(x' - x_0) dx' \quad \text{pour } 0 < x' < x$$

qui est nul partout sauf en $x' = x_0$ d'où,

$$\varphi(x) = Q_0 \frac{[\cos(kx_0) + j\beta_0 \sin(kx_0)][\cos(k(L-x))]}{-k \sin(kL) + j\beta_0 k(\cos(kL))} \quad \text{pour } 0 < x_0 < x$$

et

$$\varphi(x) = Q_0 \frac{[\cos(kx) + j\beta_0 \sin(kx)][\cos(k(L-x_0))]}{-k \sin(kL) + j\beta_0 k(\cos(kL))} \quad \text{pour } 0 < x < x_0$$

On peut alors en déduire la pression acoustique qui est donnée simplement par :

$$p(x;t) = j\omega\rho_0\varphi(x)e^{j\omega t}$$

soit encore

$$p(x;t) = j\rho_0 c_0 Q_0 \frac{[\cos(kx_0) + j\beta_0 \sin(kx_0)][\cos(k(L-x))]}{-\sin(kL) + j\beta_0(\cos(kL))} e^{j\omega t} \quad \text{pour } 0 < x_0 < x \quad (64)$$

et

$$p(x;t) = j\rho_0 c_0 Q_0 \frac{[\cos(kx) + j\beta_0 \sin(kx)][\cos(k(L-x_0))]}{-\sin(kL) + j\beta_0(\cos(kL))} e^{j\omega t} \quad \text{pour } 0 < x < x_0 \quad (65)$$

Les maxima de pression sont donnés lorsque le dénominateur s'annule :

$$-\sin(kL) + j\beta_0 \cos(kL) = 0$$

Soit encore lorsque

$$\tan(\hat{k}L) = j\beta_0 \quad (66)$$

La recherche des modes résonants est identique au problème précédent, sans source. Indiquons que si un même matériau avait été disposé contre les deux parois, la recherche des maxima aurait aboutie à l'équation (44).

Le module des pressions quadratiques s'écrit :

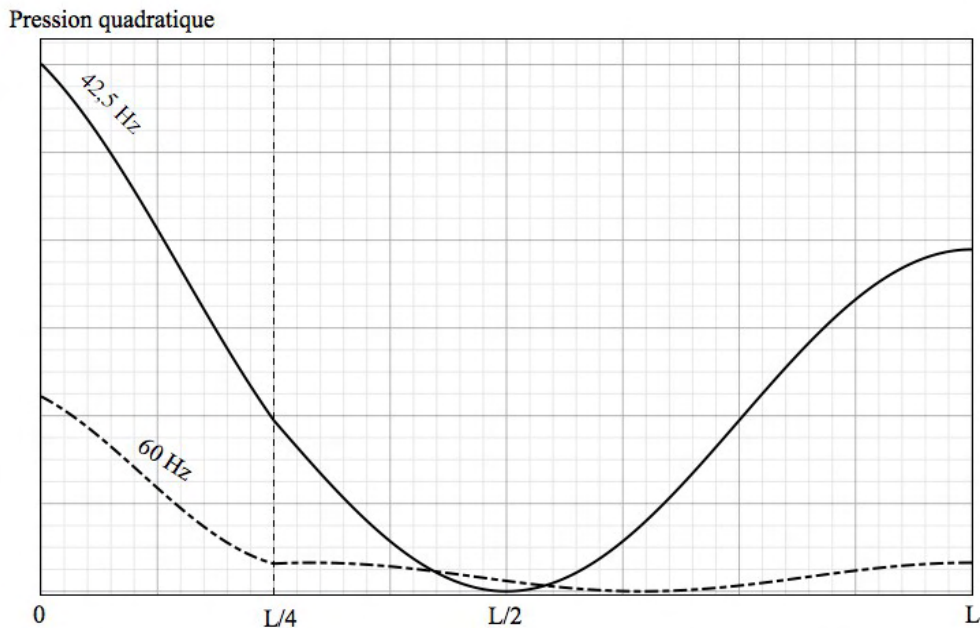
$$|p(x)|^2 = \rho_0^2 c_0^2 Q_0^2 \left| \frac{[\cos(kx_0) + j\beta_0 \sin(kx_0)][\cos(k(L-x))]}{-\sin(kL) + j\beta_0(\cos(kL))} \right|^2 \quad \text{pour } 0 < x_0 < x \quad (67)$$

et

$$|p(x)|^2 = \rho_0^2 c_0^2 Q_0^2 \left| \frac{[\cos(kx) + j\beta_0 \sin(kx)][\cos(k(L-x_0))]}{-\sin(kL) + j\beta_0(\cos(kL))} \right|^2 \quad \text{pour } 0 < x < x_0 \quad (68)$$

Signalons qu'avec $\beta_0 \rightarrow 0$, on retrouve en principe l'expression correspondant au cas des parois parfaitement rigides et réfléchissantes (condition de Neumann) dont la pression réelle, établie au chapitre 3), est donnée par l'équation (23) qui n'est autre qu'un développement en série de cosinus des expressions (64) et (65).

Le graphique ci-dessous indique le module des pressions quadratiques pour deux fréquences d'excitation. La première, proche du premier mode propre, de 42,5 Hz et la seconde, quelconque, de 60 Hz. La source étant située au premier quart de la longueur $L = 4$ m. Dans cet exemple l'admittance spécifique réduite a été prise arbitrairement à $\beta = 0,36 + 0,28j$.



Remarquons la dissymétrie des courbes qui n'est pas liée à la disparité de l'absorption entre les deux parois mais à la présence de la source. La pression sera toujours plus importante sur la paroi située du côté de la source. Les plus motivés des lecteurs pourront aisément programmer dans un grapheur ou dans Matlab, les expressions (67) et (68) et faire varier indéfiniment les paramètres d'entrées du problème.

Signalons afin que le problème à deux sources se traite aisément en faisant la somme des champs de pression produits par chacune des sources.

7) Ondes planes stationnaires sur trois dimensions, cas général, théorie de Morse & Ingrad

Pour finir, signalons que l'étude du champ stationnaire en trois dimensions, avec des conditions aux frontières quelconques, peut s'aborder par le modèle approché de Morse & Ingard, formulation relativement accessible à celui qui sera arrivé au bout de cette lecture !

La pression portée par un mode mnp est donnée par :

$$p_{mnp}(x; y; z) = \frac{\omega \rho_0 c_0^2 Q_0 \psi_{mnp}(x; y; z) \psi_{mnp}(x_0; y_0; z_0)}{V A_{mnp} \sqrt{4\omega_{mnp}^2 \lambda_{mnp}^2 + (\omega^2 - \omega_{mnp}^2)^2}} \quad (69)$$

Avec

$(x_0; y_0; z_0)$ position de la source omnidirectionnelle

$(x; y; z)$ position du point de réception

V volume du local parallélépipédique de dimensions $L \times l \times h$

ω pulsation imposée pour la source

ω_{mnp} pulsation propre du mode $m n p$

Q_0 débit de la source omnidirectionnelle

ψ_{mnp} fonctions propres :

$$\psi_{mnp}(x; y; z) = \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{h} z\right)$$

$$\psi_{mnp}(x_0; y_0; z_0) = \cos\left(\frac{m\pi}{L} x_0\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l} y_0\right) \cos\left(\frac{p\pi}{h} z_0\right)$$

λ_{mnp} coefficient d'amortissement du mode $m n p$:

$$\lambda_{mnp} = \beta_r c_0 \left(\frac{\varepsilon_m}{L} + \frac{\varepsilon_n}{l} + \frac{\varepsilon_p}{h} \right)$$

Pour un mode $m n p$ donné:

- si $m = 0$ alors $\varepsilon_m = 1$ sinon $\varepsilon_m = 2$
- si $n = 0$ alors $\varepsilon_n = 1$ sinon $\varepsilon_n = 2$
- si $p = 0$ alors $\varepsilon_p = 1$ sinon $\varepsilon_p = 2$

où β_r est la partie réelle de l'admittance spécifique réduite, indépendante de la pulsation et de l'angle d'incidence et supposée identique sur toutes les parois.

Il s'agit ici, avec l'introduction des nombres entiers ε , de donner plus ou moins de poids à la constante d'amortissement suivant la nature des modes (axial, tangentiel ou oblique). Les modes axiaux étant moins amortis car arrivant sur la paroi sous incidence normale. A contrario, les modes obliques avec des indices m , n et p non nuls, étant les plus amortis.

De même, le terme A_{mnp} est également fonction de la nature du mode :

$$A_{mnp} = \frac{I}{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_p}$$

Remarquons qu'en appliquant la condition aux frontières de Neumann (parois parfaitement rigides et réfléchissantes) la constante d'amortissement devient nulle ($A_{mnp} = 0$) et la relation de Morse & Ingard (69) s'écrit :

$$p_{mnp}(x; y; z) = \frac{\omega \rho_0 c_0^2 Q_0 \psi_{mnp}(x; y; z) \psi_{mnp}(x_0; y_0; z_0)}{V A_{mnp} (\omega^2 - \omega_{mnp}^2)} \quad (70)$$

Expression qu'il convient de comparer à la pression réelle établie au chapitre 4, dans les conditions de Neumann, où la pression portée par un mode s'écrivait d'après l'équation (29):

$$p_{mnp}(x; y; z) = k_0 \rho_0 c_0 Q_0 \frac{\Psi_{mnp}(x; y; z) \Psi_{mnp}(x_0; y_0; z_0)}{A_{mnp} [k_0^2 - k_{mnp}^2]} \quad (29')$$

(70) et (29') étant deux expressions strictement identiques avec $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ et en remarquant que le terme A_{mnp} dans (29') contenait le volume V de la salle. En effet, il avait été posé au chapitre 4 que :

$$A_{mnp} = \frac{L}{\sqrt{(2 - \delta_{m0})(2 - \delta_{q0})}} \frac{l}{\sqrt{(2 - \delta_{m0})(2 - \delta_{q0})}} \frac{h}{\sqrt{(2 - \delta_{m0})(2 - \delta_{q0})}} \delta_{mq} \delta_{nr} \delta_{ps} = \frac{Llh}{\varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_p}$$

La difficulté pratique avec cette formulation de Morse & Ingard est que les six parois de la salle sont supposées identiques ! En réalité, il faudra trouver une méthode de calcul fiable pour « moyenner » l'admittance des parois.

Annexe A

Fonction potentielle des vitesses en acoustique

Rappelons les trois lois fondamentales de l'acoustique linéaire dans l'hypothèse du fluide homogène, au repos et indépendantes du temps :

L'équation d'Etat (compression-détente considérée adiabatique):

$$dp = c^2 d\rho$$

L'équation d'Euler (équation de Newton appliquée à une particule de fluide):

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

L'équation de continuité (traduit la conservation de la masse):

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

En combinant les dérivées, de **l'équation d'Euler** par rapport à x et de **l'équation de continuité** par rapport à t , on aboutit à l'équation des ondes en pression :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

On introduit une fonction potentielle scalaire, notée $\Phi(x; y; z; t)$, telle que :

$$\vec{v} = - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \quad (\text{a})$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse particulière de l'onde acoustique (vitesse de la compression et détente des molécules d'air). Pour que la vitesse dérive d'un potentiel scalaire, il faut que le milieu de propagation soit irrotationnel, c'est à dire sans « tourbillon ».

Pour une onde plane se propageant suivant x , la relation (a) devient :

$$v = v_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{b})$$

L'équation d'Euler peut s'écrire alors :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-\partial \Phi}{\partial x} \right) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

d'où

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (c)$$

De la connaissance de la fonction $\Phi(x; t)$, on déduit aisément la vitesse (b) et la pression (c) par dérivation.

On peut alors réécrire **l'équation de continuité** en fonction du potentiel scalaire Φ en injectant (b) et de (c) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-\partial \Phi}{\partial x} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \Phi(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi(x; t)}{\partial t^2} = 0$$

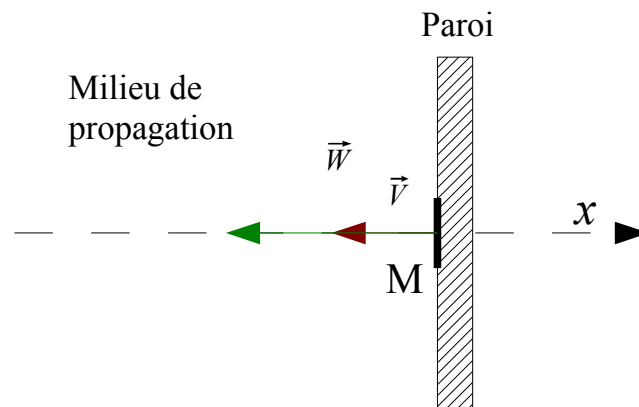
Le potentiel des vitesses Φ vérifie également l'équation des ondes.

L'utilisation du potentiel des vitesses dans la recherche de la solution de l'équation des ondes prend de l'intérêt lorsque le problème contient une source sonore lors de l'utilisation de l'équation intégrale 1D (voir annexe E).

Annexe B

Condition aux frontières dans le domaine fréquentiel

Considérons une onde plane monochromatique de pulsation ω se propageant suivant l'axe de x croissant arrivant sur une paroi au point M.



L'impédance acoustique spécifique de la paroi, notée Z , au point M s'écrit par définition :

$$Z(M; \omega) = \frac{p(M; \omega)}{V(M; \omega) - W(M; \omega)}$$

où V est le module de la vitesse particulaire de l'onde plane sur la paroi au point M et W le module la vitesse vibratoire de la paroi. La différence $V-W$ représente la vitesse relative de l'air au point M.

On a donc au point M :

$$Z V(\omega) - p(\omega) = Z W(\omega) \quad (d)$$

Par ailleurs, en régime harmonique d'après l'équation d'Euler

$$j\omega\rho_0 V = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

d'où

$$V = \frac{j}{\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$

La relation (d) devient alors

$$Z \frac{j}{\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - p = Z W \quad (e)$$

En introduisant l'admittance spécifique réduite définie par $\beta = \frac{\rho_0 c_0}{Z}$, et après réarrangement de (e), il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + jk \beta p = -j\omega \rho_0 W$$

La pression p , l'admittance réduite β et la vitesse vibratoire de la paroi W sont des fonctions de la pulsation ω et de la position sur la paroi. Au final, on écrit la condition aux frontières de façon générale :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + jk \beta(M; \omega) \right] p(M; \omega) = -j\omega \rho_0 W(M; \omega)$$

À partir de cette condition générale, on définit trois cas particuliers importants:

- Si la paroi est immobile et parfaitement rigide, alors $W = 0$ et $\beta = 0$ (Impédance de paroi Z infinie). Ainsi la condition aux frontières se réduit à :

$$\frac{\partial p(M; \omega)}{\partial x} = 0$$

c'est la condition de **Neumann** (*Franz, 1798-1895, allemand*)

Elle signifie que la vitesse particulière V est nulle sur la paroi rigide.

- Si la paroi est d'impédance nulle c'est-à-dire $\beta \rightarrow \infty$ alors :

$$p(M; \omega) = 0$$

c'est la condition de **Dirichlet** (*Peter Gustav, 1805-1859, allemand*)

On rencontre cette condition dans un guide ouvert (ou sur une ouverture dans une paroi). Ainsi la pression est contrainte de prendre la pression atmosphérique pour valeur et la pression acoustique est par conséquent nulle.

- Si la paroi est immobile $W = 0$ et d'admittance β quelconque, dans ce cas la condition aux limites devient :

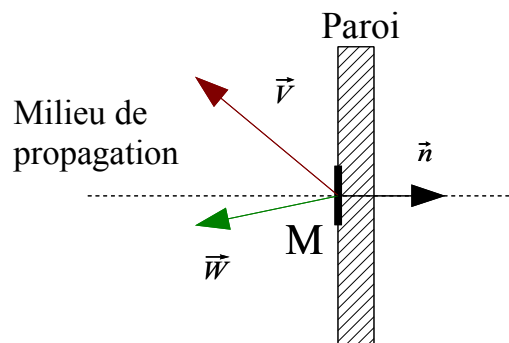
$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + jk \beta(M; \omega) \right] p(M; \omega) = 0$$

C'est la condition dite de **Robin** ou d'impédance

Condition réalisée, par exemple, lorsqu'un matériau poreux est posé contre un mur parfaitement rigide et immobile.

Notons que l'admittance ou plutôt l'impédance de la paroi est une grandeur déterminée expérimentalement par mesures au tube de Kundt ou par des méthodes in situ. À défaut, il peut être fait usage du modèle de **Delany & Bazley**.

Par ailleurs, nous avons considéré précédemment une condition aux frontières dans un modèle 1D où l'onde se propageait suivant x . Dans une configuration 3D où l'onde plane arrive sous incidence quelconque, il faut projeter l'équation d'Euler sur l'axe normal à la paroi sachant que le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ est orienté, par convention, sortant du domaine fluide considéré.



Dans ce cas, la condition aux limites s'écrit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} + jk \beta(M; \omega) \right] p(M; \omega) = -j\omega \rho_0 \vec{w}(M; \omega) \cdot \vec{n}$$

Remarquons que cette condition aux limites s'applique à chaque élément de surface de la paroi. Dans le cas d'une paroi homogène, on peut considérer en première approximation que l'admittance est la même en tout point mais que cette hypothèse est évidemment simplificatrice.

Annexe C

Équation d'Helmholtz

(Hermann, 1821-1894, allemand)

L'équation des ondes en pression s'écrit pour une propagation suivant l'axe de x , **en dehors de source** :

$$\frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial t^2} = 0$$

Cela signifie que la source (de bruit) est :

- soit extérieure au domaine spatial étudié,
- soit que l'étude du champ de pression se fait après l'extinction de la source.

En **régime harmonique** (sinusoïdale) pour une onde monochromatique de pulsation ω la solution à l'équation des ondes est de la forme :

$$p(x;t) = p(x) e^{j\omega t}$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} e^{j\omega t}$$

et

$$\frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial t^2} = (j\omega)^2 p(x) e^{j\omega t} = -\omega^2 p(x) e^{j\omega t}$$

En injectant ces dérivées secondes dans l'équation des ondes, il vient aisément après simplification du terme temporel :

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} p(x) = 0$$

En posant $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$, dont la dimension est identique à celle du nombre d'onde, il vient :

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k_0^2 p(x) = 0$$

C'est l'**équation de Helmholtz** homogène

De même, l'équation de Helmholtz peut s'écrire en fonction du potentiel scalaire Φ avec :

$$\Phi(x; t) = \varphi(x) e^{j\omega t}$$

on a

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + k_0^2 \varphi(x) = 0$$

Signalons que l'équation d'Helmholtz s'écrit également en régime quelconque sous la forme :

$$\frac{\partial^2 P(x; \omega)}{\partial x^2} + k_0^2 P(x; \omega) = 0$$

Dans ce cas, $P(x; \omega)$ est la transformée de Fourier par rapport au temps de la pression acoustique $p(x; t)$:

$$P(x; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(x; t) e^{-j\omega t} dt$$

En **présence de source (de bruit)** à l'intérieur du domaine qui impose une pulsation ω , on admettra que l'équation d' Helmholtz inhomogène s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k_0^2 p(x) = -j\omega \rho_0 q(x)$$

ou encore en fonction du potentiel scalaire :

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + k_0^2 \varphi(x) = -q(x)$$

$q(x)$ étant le débit de la source de bruit, qui en régime harmonique, s'écrit $q(x) e^{j\omega t}$

Enfin dans un espace à trois dimensions l'équation de Helmholtz devient :

$$\Delta p(\vec{r}) + k_0^2 p(\vec{r}) = -j\omega \rho_0 q(\vec{r})$$

ou bien

$$\Delta \varphi(\vec{r}) + k_0^2 \varphi(\vec{r}) = q(\vec{r})$$

où Δ est l'opérateur Laplacien et $\vec{r}$ le vecteur position.

ANNEXE D : Tangente d'un nombre complexe ?!?

Le premier membre en $\tan(kL)$ de l'équation (43) mérite quelques précisions car celui-ci est une grandeur complexe.

En introduisant les formules d'Euler :

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

puis en exprimant e^{jz} et e^{-jz} en fonction des parties, réelle et imaginaire ($z = a + jb$)

$$e^{jz} = e^{ja - b} = e^{-b}(\cos a + j \sin a)$$

$$e^{-jz} = e^{-ja + b} = e^b(\cos a - j \sin a)$$

il vient :

$$2 \cos(z) = e^{jz} + e^{-jz} = e^{-b}(\cos a + j \sin a) + e^b(\cos a - j \sin a) = \cos a(e^{-b} + e^b) - j \sin a(e^b - e^{-b})$$

$$2j \sin(z) = e^{jz} - e^{-jz} = e^{-b}(\cos a + j \sin a) - e^b(\cos a - j \sin a) = \cos a(e^{-b} - e^b) + j \sin a(e^b + e^{-b})$$

Rappelons les formules du cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On a donc :

$$2 \cos z = 2 \cos(a) \operatorname{ch}(b) - 2j \sin(a) \operatorname{sh}(b)$$

$$2j \sin z = -2 \cos(a) \operatorname{sh}(b) + 2j \sin(a) \operatorname{ch}(b)$$

Au final :

$$\cos(a + jb) = \cos(a) \operatorname{ch}(b) - j \sin(a) \operatorname{sh}(b)$$

$$\sin(a + jb) = \sin(a) \operatorname{ch}(b) + j \cos(a) \operatorname{sh}(b)$$

$$\tan(a + jb) = \frac{\sin(a) \operatorname{ch}(b) + j \cos(a) \operatorname{sh}(b)}{\cos(a) \operatorname{ch}(b) - j \sin(a) \operatorname{sh}(b)}$$

La tangente d'un nombre complexe est donc un nombre complexe !

Annexe E

Équation intégrale 1D

Fonction de Green

(George, 1793-1841, anglais)

Les problèmes d'acoustique à une dimension, en présence d'une source harmonique, peuvent se résoudre aisément à l'aide de l'équation intégrale 1D et de la fonction de Green. Tous les problèmes unidimensionnels de la forme :

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + k_0^2 \varphi(x) = -q(x)$$

avec les conditions aux frontières quelconques

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}_{x=0} + jk_0 \beta_0 \varphi_0 &= W_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}_{x=L} + jk_0 \beta_L \varphi_L &= W_L \end{aligned}$$

Où β_0 et β_L sont les admittances acoustiques spécifiques réduites, respectivement, en $x=0$ et $x=L$. W_0 et W_L sont les termes sources, imposés aux extrémités du domaine, ayant la dimension d'une vitesse.

...ont une solution donnée par l'équation intégrale :

$$\varphi(x) = \int_0^L G(x; x') q(x') dx' + [W_L G(L; x) - W_0 G(0; x)]$$

Dans le cas présent, $\varphi(x)$ est la fonction spatiale du potentiel des vitesses $\Phi(x; t)$.

$$\Phi(x; t) = \varphi(x) e^{j\omega t}$$

La pression acoustique est alors donnée par :

$$p(x; t) = \rho_0 \frac{\partial \Phi(x; t)}{\partial t} = j\omega \rho_0 \varphi(x) e^{j\omega t} \quad (\text{voir annexe A})$$

$G(x; x')$ est la fonction de Green représentant la réponse au point x d'une source ponctuelle en x' .

$$G(x; x') = \frac{[\cos(kx') + j\beta_0 \sin(kx')][\cos(k(L-x)) + j\beta_L \sin(k(L-x))]}{k(j\beta_L \cos(kL) - \sin(kL)) + j\beta_0 k(\cos(kL) + j\beta_L \sin(kL))} \quad \text{pour } 0 < x' < x$$

et

$$G(x; x') = \frac{[\cos(kx) + j\beta_0 \sin(kx)][\cos(k(L-x')) + j\beta_L \sin(k(L-x'))]}{k(j\beta_L \cos(kL) - \sin(kL)) + j\beta_0 k(\cos(kL) + j\beta_L \sin(kL))} \quad \text{pour } 0 < x \leq x'$$

Dans l'équation intégrale, le terme $\int_0^L G(x; x') q(x') dx'$ représente la contribution du champ du à la source en x' , alors que $[W_L G(x; L) - W_0 G(x; 0)]$ est la contribution des sources aux extrémités du domaine.

La fonction de Green (au sens des distributions) possède les propriétés suivantes :

- G est réciproque : $G(x; x') = G(x'; x)$
- G est solution de l'équation d'Helmholtz : $\frac{\partial^2 G(x; x')}{\partial x^2} + k_0^2 G(x; x') = -\delta(x - x')$
- G satisfait aux conditions limites du problème
- G est continu en $x = x'$
- G' est discontinu en $x = x'$: $G'_+ - G'_- = -1$
- G est indépendant des sources donc satisfait aux conditions limites homogènes du problème :

$$\frac{\partial G}{\partial x}_{x=0} + jk_0 \beta_0 G_0 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}_{x=L} + jk_0 \beta_L G_L = 0$$

L'utilisation du formalisme intégral et de la fonction Green est un outil remarquable d'efficacité pour la résolution des problèmes d'acoustique 1D.

Bibliographies :

- *Acoustique des salles et sonorisation* de Jacques Jouhaneau (édition TEC & DOC)
- *Notions élémentaires d'acoustique- Électroacoustique* de Jacques Jouhaneau (édition TEC & DOC)
- *Acoustique générale Équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluides et solides, application* de Catherine Potel et Michel Bruneau (édition ellipse)
- *Cours CNAM ACC109 « acoustique industriel »* d'Alexandre Garcia
- *Cours CNAM ACC208 « acoustique approfondie »* d'Alexandre Garcia
- *Éléments d'acoustique générale, de quelques lieux communs de l'acoustique à une première maîtrise des champs sonores* de Vincent Martin (Édition Presse polytechniques et universitaires romandes)
- *Sound insulation* de Carl Hopkins (édition BH)
- <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~abachelo/Abboud-Terrasse.pdf>