

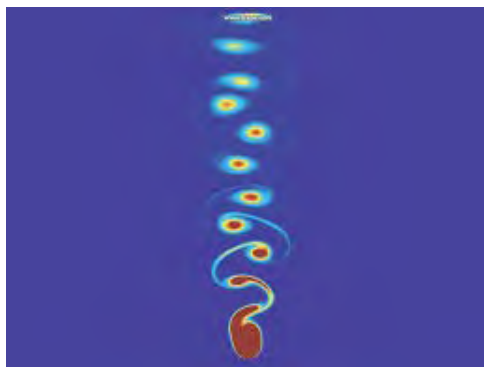
Reynolds, Strouhal et les autres !

Frédéric POIRRIER
Janvier 2016

D'où provient le nombre de **Reynolds**. Et ceux de **Froude** et de **Mach** ? Et celui de **Strouhal** que l'on retrouve souvent en acoustique en présence d'écoulement d'air ?

Ces nombres, sans dimensions, sont tous issus d'une analyse dimensionnelle de l'équation reine de la mécanique des fluides, celle de **Navier-Stokes** qui régit les lois du mouvement dans un fluide visqueux.

Après avoir expliqué sommairement, car c'est une affaire de spécialiste, le sens de chaque terme de l'équation de Navier-Stokes, on montrera l'origine des nombres.



Allée de Von Karman

<https://www.youtube.com/watch?v=ChNh1NCimkc>

1) Équation de NAVIER-STOKES	page 2
2) Nombre de REYNOLDS	page 5
3) Nombre de FROUDE	page 7
4) Nombre de MACH	page 8
5) Nombre de STROUHAL	page 10

1) Équation de NAVIER-STOKES

Henri Navier (1785-1836 Français) et George Gabriel Stokes (1819-1903 Anglais)

L'équation de Navier-Stokes est une équation différentielle non linéaire qui permet de décrire le champ de vitesse d'un écoulement fluide. Disons-le tout suite, cette équation n'a de solution analytique que dans des cas très simplifiés !

Elle existe sous différentes formes. Dans le cas présent, nous retenons que pour un écoulement fluide ayant lieu dans le champ de gravitation, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \left(\frac{\mu}{3} + \eta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{g}$$

Avec :

- ρ est la masse volumique du fluide considéré.

Pour l'air, à température et pression standard, $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$

- $\vec{v}$ est le vecteur vitesse d'une particule fluide
- p est la pression existant au point considéré
- μ est le premier **coefficient de viscosité dynamique** ou de cisaillement qui traduit l'amortissement des couches fluides voisines.

Pour l'air, $\mu = 18,5 \cdot 10^{-6} \text{ Ns/m}^2$ à température et pression standard.

- η est le second coefficient de viscosité ou de volume qui traduit l'amortissement par rotation ou vibration des molécules engendrées par les chocs. Il est relié à la résistance du fluide à la compression. Pour un gaz monoatomique ce coefficient est très petit. Dans la suite de l'exposé, il est considéré nul.
- $\vec{\nabla}$ est l'opérateur Nabla, qui en coordonnées cartésiennes, s'écrit :

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

- Δ est l'opérateur Laplacien avec :

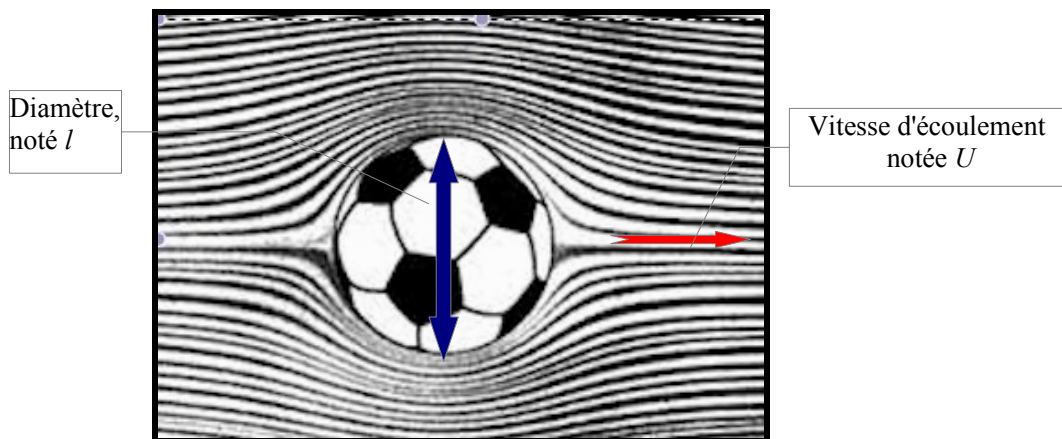
$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Par ailleurs, dans l'équation de **Navier-Stokes**, les différents termes peuvent s'expliciter ainsi :

- $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est la quantité **d'accélération** instationnaire par unité de volume.
- $\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}$ représente la quantité d'**accélération convective** par unité de volume issue des forces d'inertie.
- $-\vec{\nabla} p$ correspond à la **force de pression** par unité de volume.
- $\rho \vec{g}$ est le terme des **forces de pesanteur** par unité de volume.
- $\mu \Delta \vec{v} + (\frac{\mu}{3} + \eta) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ sont les termes associés aux **forces visqueuses** par unité de volume.

Remarquons que le premier membre de l'équation de **Navier-Stokes** a les dimensions d'une accélération par unité de volume alors que le second membre correspond à des forces par unité de volume. On reconnaît une forme de **l'équation de Newton**.

Dans la suite de l'exposé, nous considérons un écoulement fluide autour d'un corps solide, par exemple :



avec trois grandeurs caractéristiques :

- La dimension typique de l'objet sera notée l (par exemple le diamètre du ballon pour l'exemple illustré ci-dessus).
- La vitesse de l'écoulement du fluide, sera notée U .
- Les variations de temps seront caractérisées par une durée notée t_0 et de fréquence :

$$f_0 = \frac{l}{t_0}$$

2) Nombre de REYNOLDS

Osborne Reynolds (1842-1912) Irlandais

Effectuons le rapport entre les termes $\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}$ (**accélération convective**) et $\mu \Delta \vec{v} + \left(\frac{\mu}{3} + \eta\right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ (**forces visqueuses**) de l'équation de Navier-Stokes en faisant l'approximation $\eta \approx 0$.

Par analyse dimensionnelle, ces deux termes peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs caractéristiques introduites précédemment, U et de l :

$$|\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}| \sim \frac{\rho U^2}{l} \quad \text{et} \quad \left| \frac{4}{3} \mu \Delta \vec{v} \right| \sim \frac{\mu U}{l^2}$$

En effet,

- $\vec{v} \sim U$, la vitesse à la dimension de U
- $|\vec{\nabla} \vec{v}| \sim \frac{U}{l}$, le gradient de la vitesse à la dimension de U/l
- $|\Delta \vec{v}| \sim \frac{U}{l^2}$, le Laplacien de la vitesse à la dimension de U/l^2

Il vient alors que:

$$\frac{|\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}|}{\left| \frac{4}{3} \mu \Delta \vec{v} \right|} \sim \frac{\frac{\rho U^2}{l}}{\frac{\mu U}{l^2}} = \frac{\rho U l}{\mu} \quad \text{qui n'est autre que le **nombre de Reynolds**, noté R_e }$$

On a donc :

$$R_e = \frac{\rho U l}{\mu}$$

Le nombre de Reynolds sert à classer les régimes d'écoulement.

- Lorsque $R_e \ll 1$ les effets visqueux dominent. La cohésion du fluide est maintenue par les frottements visqueux. Dans ce cas, l'écoulement est dit **rampant** (ou de Stokes).
- Lorsque $R_e \gg 1$, l'effet d'inertie est prépondérant, l'énergie cinétique est très supérieure aux forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. L'écoulement est dit **tourbillonnaire** avec des turbulences qui en acoustique est source de bruit. En pratique, dans un conduit circulaire, la valeur critique du nombre de Reynolds entre un écoulement laminaire et turbulent est de l'ordre de 2000.

Il est d'usage d'écrire le nombre de Reynolds en fonction du coefficient de **viscosité cinématique** ν défini par $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, qui s'exprime en m^2/s :

$$R_e = \frac{Ul}{\nu}$$

Vérifions que le **nombre de Reynolds** n'a pas de dimensions en adoptant la convention d'écriture suivante :

Grandeur de base	Symbole de la dimension
Longueur	L
Masse	M
Temps	T

L'écriture [X] signifiant « dimensions de X » :

$$[U] = \frac{L}{T} ; \quad [l] = L \quad \text{et} \quad [\nu] = \frac{L^2}{T}$$

d'où

$$[R_e] = \frac{\frac{L}{T} L}{\frac{L^2}{T}} = 1$$

3) Nombre de FROUDE

William Froude (1810-1879)

Le nombre de Froude fait intervenir le rapport entre les termes $\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}$ (**accélération convective**) et $\rho \vec{g}$ (**force de pesanteur**).

Par analyse dimensionnelle, ces deux termes peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs caractéristiques du problème, U et de l . En procédant de la même façon que pour le nombre de Reynolds, on a :

$$|\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}| \sim \frac{\rho U^2}{l} \quad \text{et} \quad \rho \vec{g} \sim \rho g$$

Il vient alors

$$\frac{|\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}|}{|\rho \vec{g}|} \sim \frac{\frac{\rho U^2}{l}}{\rho g} = \frac{U^2}{gl} \quad \text{qui définit le **nombre de Froude**, noté } F_r$$

On a donc :

$$F_r = \frac{U^2}{gl}$$

Ce nombre permet de comparer les forces d'inertie aux forces de pesanteur. À ma connaissance il n'existe pas d'application en rapport avec l'acoustique car les effets de forces de pesanteur sont négligés vis-à-vis de l'air. Par contre, pour un écoulement d'eau :

- Lorsque $F_r > 1$, le régime d'écoulement est qualifié de **torrentiel**. Pour une faible hauteur d'eau (l) et une forte vitesse (U), l'eau est tirée par les forces qui la meuvent sans que la masse en aval soit une gêne.
- Lorsque $F_r < 1$, le régime d'écoulement est qualifié de **fluvial**. Pour une forte hauteur d'eau et une vitesse faible, le comportement des particules de fluides en mouvement est contraint par celles qui les précèdent.

4) Nombre de MACH

Ernst Mach (1838-1916) Autrichien

Considérons maintenant le rapport entre les termes de l'équation de Navier-Stokes $\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}$ (**accélération convective**) et $-\vec{\nabla} p$ (**forces de pression**).

On a encore une fois en adimensionnant les termes: $|\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}| \sim \frac{\rho U^2}{l}$ et $|\vec{\nabla} p| \sim \frac{p}{l}$

d'où

$$\frac{|\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}|}{|\vec{\nabla} p|} \sim \frac{\frac{\rho U^2}{l}}{\frac{p}{l}} = \frac{\rho U^2}{p} \text{ qui définit le carré du nombre de Mach, noté } M_a$$

On a donc

$$M_a^2 = \frac{\rho U^2}{p}$$

Vérifions que le nombre de Mach, ou plutôt son carré, soit sans dimension en se rappelant qu'une pression est une force par unité de surface et qu'une force, est d'après l'équation de Newton, le produit d'une masse par une accélération:

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}, \quad [U] = \frac{L}{T} \quad \text{et} \quad [p] = \frac{[F]}{[S]} = \left[\frac{ma}{S} \right] = M \frac{L}{T^2} \frac{1}{L^2} = \frac{M}{L T^2}$$

d'où

$$[M_a^2] = \frac{\frac{M}{L^3} \frac{L^2}{T^2}}{\frac{M}{L T^2}} = \frac{M}{L^3} \frac{L^2}{T^2} \frac{L T^2}{M} = 1$$

Dans le cas d'une onde acoustique, le nombre de Mach peut s'exprimer en fonction de la célérité du son.

En effet, d'après l'équation d'état $dp = c^2 d\rho$

d'où

$$c^2 \sim \frac{p}{\rho}$$

Le nombre de Mach s'écrit alors :

$$M_a = \frac{U}{c}$$

En acoustique, on retrouve le nombre de Mach dans les expressions des fréquences de coupure f_c des guides d'ondes en présence d'écoulement dont la vitesse est caractérisée par le nombre de Mach.

Ainsi les conditions pour qu'apparaisse un mode propagatif autre que le mode plan sont données, en fonction des dimensions du guide et du nombre de Mach, par les expressions suivantes :

- Pour un guide à section rectangulaire : $f_c \geq \frac{c}{2L} \sqrt{1 - M_a^2}$ L étant la grande dimension
- Pour un guide à section circulaire : $f_c \geq \frac{\pi c}{1,84 a} \sqrt{1 - M_a^2}$ a étant le rayon du guide

Ces relations sont valables tant que $M_a < 0,2$, c'est-à-dire pour des vitesses d'écoulement inférieures à 68 m/s.

5) Nombre de STROUHAL

Vincent Strouhal (1850-1922) Tchèque

Ce nombre est sans doute celui qui présente le plus d'intérêt en acoustique. On le retrouve à plusieurs reprises dans le guide de l'ASHRAE (*American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers*) lorsqu'il s'agit d'évaluer le bruit produit dans un conduit dès que les vitesses d'air sont importantes, lors de changements de section ou des coudes.

On considère maintenant le rapport entre $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ (**l'accélération**) et $\rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v}$ (**l'accélération convective**).

En adimensionnant, ces termes s'écrivent :

$$\left| \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{\rho U}{t_0} \quad \text{et} \quad \left| \rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v} \right| \sim \frac{\rho U^2}{l}$$

d'où

$$\frac{\left| \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|}{\left| \rho \vec{v} \vec{\nabla} \vec{v} \right|} \sim \frac{\frac{\rho U}{t_0}}{\frac{\rho U^2}{l}} = \frac{l}{t_0 U} = \frac{f_0 l}{U} \quad \text{qui représente le **nombre de Strouhal**, noté } S_r.$$

$$S_r = \frac{f_0 l}{U}$$

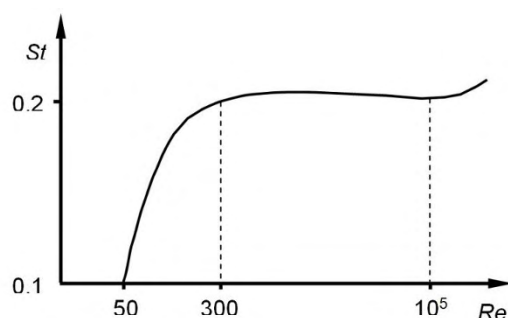
Ce nombre, dont on vérifiera aisément qu'il est sans dimension, décrit les mécanismes de circulation oscillante.

Historiquement, Strouhal a étudié le bruit que produit le vent lorsqu'il rencontre un fil tendu. Ainsi, il a mis en évidence une relation entre la fréquence du son émis, la vitesse du vent et le diamètre des fils. Ce phénomène est bien audible, les jours de grand vent dans les ports de plaisance, par un sifflement caractéristique du vent contre les haubans des voiliers.



Le croquis ci-dessus schématise la formation de tourbillon en aval de l'objet dit **allée de Von Karman**. Le **nombre de Strouhal** associe le temps d'advection (transport) et le temps caractéristique de la turbulence génératrice du bruit.

La fréquence dominante du bruit engendré peut alors s'exprimer en fonction du **nombre de Strouhal**, qui pour un flux d'air qui percute un objet cylindrique est égal à 0,2 sur une assez large plage de vitesse d'air correspondant à un **nombre de Reynolds** compris entre 300 et 100 000.



Par exemple, la fréquence du son produit par un vent de 50 km/h (14 m/s environ) qui rencontre un câble de 5 mm de diamètre sera donnée par :

$$f_0 = \frac{U S_t}{l}$$

soit

$$f_0 = \frac{14 \times 0,2}{0,005} = 560 \text{ Hz}$$

Le Web abonde de sites consacrés à la mécanique des fluides. Après cette vague introduction, l'internaute intéressé ne manquera pas de satisfaire sa curiosité en surfant sur la toile !

Bibliographies :

Cours de mécanique des fluides *une introduction à l'hydraulique pour ingénieurs civils* de Christophe Ancéy de l'école Polytechnique Fédérale de Lausanne: <http://lhc.epfl.ch/cours/bachelor/cours-meca.pdf>

Cours du CNAM ACC208 de *Mécanique des fluides pour l'acoustique* d'Alexandre Garcia

Cours/ED CNAM ACC208 *Analyse dimensionnelle appliquée à la mécanique des fluides* de Jean-Baptiste Doc,

Le traitement du bruit dans les installations de ventilation de M.A. Iqbal, T.K. Willson et R.J. Thomas (Les éditions Parisiennes CFP)