

Salles cylindriques

Frédéric Poirrier

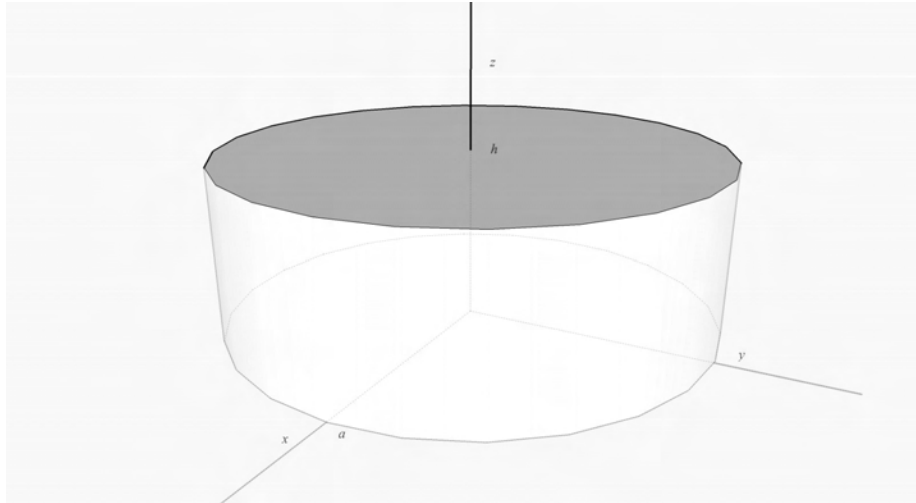
Octobre 2015

Cet exposé fait suite au travail concernant les ondes stationnaires qui avait conduit à la recherche des modes propres et de l'expression des champs de pression dans plusieurs configurations, 1D et 3D en coordonnées cartésiennes. On reprend, dans ce nouvel exposé, le même thème mais pour des salles de géométrie cylindrique. D'abord en s'intéressant au champ de pression stationnaire existant dans des salles de forme cylindrique et semi-cylindrique puis on tentera dans un second temps d'établir l'expression de la pression acoustique dans une salle en éventail, assez peu documentée dans la littérature. L'intérêt pouvant constitué en pratique, à l'évaluer l'incidence du non parallélisme d'une paire de parois vis-à-vis du champ de pression stationnaire.

On trouvera en annexe quelques notions succinctes à propos des fonctions de Bessel cylindriques ainsi que la classique résolution de l'équation des ondes, sans second membre, en coordonnées cylindriques. Pour cette dernière partie, l'auteur s'est inspiré des notions figurant dans l'excellent manuel d'*acoustique générale* de Catherine Potel et Michel Bruneau.

1) Champ de pression dans une salle cylindrique en l'absence de source	page 2
2) Champ de pression dans un demi-cylindrique en l'absence de source	page 7
3) Salle parallélépipédique versus salles à géométrie cylindrique !	page 11
4) Salle en éventail	page 14
Annexe A : Fonctions de Bessel cylindriques	page 18
Annexe B : Équation des ondes en coordonnées cylindriques	page 24

1) Champ de pression dans une salle cylindrique en l'absence de source



On suppose une salle de forme cylindrique de **rayon a** et de **hauteur h** et l'on considère que toutes les parois sont parfaitement rigides c'est-à-dire d'impédances infinies (condition aux frontières de Neumann) qui s'écrit :

$$\frac{\partial \hat{p}(M; \omega)}{\partial n} = 0 \quad (1.00)$$

où le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ est orienté, par convention, sortant du domaine fluide considéré (ici l'intérieur de la salle).

La condition de Neumann (1.00) signifie que la vitesse particulière de l'onde de pression est nulle contre la paroi rigide.

La solution de l'équation des ondes en pression, en coordonnées cylindriques à variables séparées de la forme $p(r; \psi; z; t) = R(r)\Psi(\psi)Z(z)T(t)$, est donnée par l'expression B7 (voir annexe B) :

$$\hat{p}(r; \psi; z; t) = \hat{A}_0 [J_v(k_w r) + \hat{R}_1 N_v(k_w r)] [\cos(v\psi) + \hat{R}_2 \sin(v\psi)] [\cos(k_z z) + \hat{R}_3 \sin(k_z z)] e^{j\omega t} \quad (1.01)$$

Les constantes $\hat{A}_0$, $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ et $\hat{R}_3$ sont à déterminer en fonction des conditions aux frontières du domaine et des conditions initiales (non considérées dans ce problème car dépendant du champ initial).

Remarquons que la **fonction de Neumann** $N_v(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ n'est pas définie en $r = 0$ puisqu'elle tend vers $-\infty$ (voir annexe A). Dans ce problème, la pression acoustique sur l'axe de symétrie du cylindre doit être finie. Cela impose forcément que $\hat{R}_1 = 0$.

Appliquons la condition de Neumann en $z = 0$:

$$-\frac{\partial p(r; \psi; z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

d'où

$$[-k_z \sin(k_z z) + \hat{R}_3 k_z \cos(k_z z)] \Big|_{z=0} \hat{p}(r; \psi; t) = 0$$

Condition réalisée en $z = 0$ quelques soient r, ψ et t , que si $\hat{R}_3 = 0$.

Par ailleurs, nous pouvons exprimer la fonction $\Psi(\psi) = \cos(v\psi) + \hat{R}_2 \sin(v\psi)$ sous la forme d'un cosinus:

$$\Psi(\psi) = R_2' \cos(v\psi - \psi_0)$$

Ainsi l'expression du champ de pression (1.01) devient :

$$\boxed{\hat{p}(r; \psi; z; t) = \hat{A}'_0 J_v(k_w r) \cos(v\psi - \psi_0) \cos(k_z z) e^{j\omega t}} \quad (1.02)$$

où l'amplitude complexe $\hat{A}'_0$ et la phase à l'origine ψ_0 de la fonction spatiale Ψ , sont de nouvelles constantes dépendant du champ initial.

La condition de Neumann appliquée en $z = h$ s'écrit :

$$\frac{\partial p(r; \psi; z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0$$

soit

$$[k_z \sin(k_z h)] \hat{p}(r; \psi; t) = 0$$

et par voie de conséquence

$$\sin(k_z h) = 0$$

d'où

$$k_{zp} = \frac{p\pi}{h} \quad \text{avec } p = 0, 1, 2 \dots \quad (1.03)$$

Il y a quantification du nombre k_z qui se note maintenant accompagné de son indice p .

Par ailleurs, la dépendance spatiale selon la coordonnée ψ doit être de périodicité 2π :

$$\cos(v\psi - \psi_0) = \cos[v(\psi + 2\pi) - \psi_0]$$

Cette condition n'est réalisée que si v est un nombre entier noté maintenant m .

Enfin, la condition de Neumann appliquée sur la paroi circulaire en $r = a$ s'écrit :

$$\frac{\partial \hat{p}(r; \psi; z)}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

soit encore en dérivant (1.02) par rapport à r :

$$\hat{A}'_0 k_w J'_m(k_w r)_{r=a} p(\psi; z; t) = 0$$

d'où

$$J'_m(k_w a) = 0$$

En notant les valeurs numériques des zéros des fonctions dérivées de Bessel, χ_{mn} , il vient :

$$k_w a = \chi_{mn}$$

d'où

$$k_w = \frac{\chi_{mn}}{a} \quad (1.04)$$

D'après l'équation (B8), l'équation de dispersion associée à l'équation de propagation est :

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} = k_w^2 + k_z^2$$

qui s'écrit encore en fonction des indices entiers m, n et p

$$k_{mnp}^2 = \frac{\omega_{mnp}^2}{c_0^2} = \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2 + k_{zp}^2 = \left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2 \quad (1.05)$$

Les pulsations et fréquences propres sont données par :

$$\omega_{mnp} = c_0 \sqrt{\left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2} \quad (1.06)$$

$$f_{mnp} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\chi_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{\chi_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2} \quad (1.07)$$

Les fréquences propres sont les seules fréquences persistantes après arrêt de la source sonore et elles n'existent que si elles sont présentes dans le champ initial avant extinction de la source.

La pression portée par un mode mnp s'écrit :

$$\hat{p}_{mnp}(r; \psi; z; t) = \hat{A}'_{mnp} J_m(k_w r) \cos(m\psi - \psi_0) \cos(k_{zp} z) e^{j\omega_{mnp} t} \quad (1.08)$$

L'amplitude complexe $\hat{A}'_{mnp}$ pouvant contenir une information de phase, il convient de prendre son module, le terme de phase φ_{mnp} apparaissant alors dans la fonction temporelle. Dans le cas présent, cette grandeur est inconnue car dépendante du champ initial avant extinction de la source.

La pression acoustique réelle s'écrit alors:

$$p_{mnp}(r; \psi; z; t) = |\hat{A}'_{mnp}| J_m\left(\frac{\chi_{mn}}{a} r\right) \cos(m\psi - \psi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{h} z\right) \cos(\omega_{mnp} t - \varphi_{mnp}) \quad (1.09)$$

pour $0 \leq z \leq h$, $0 \leq r \leq a$ et ψ quelconque

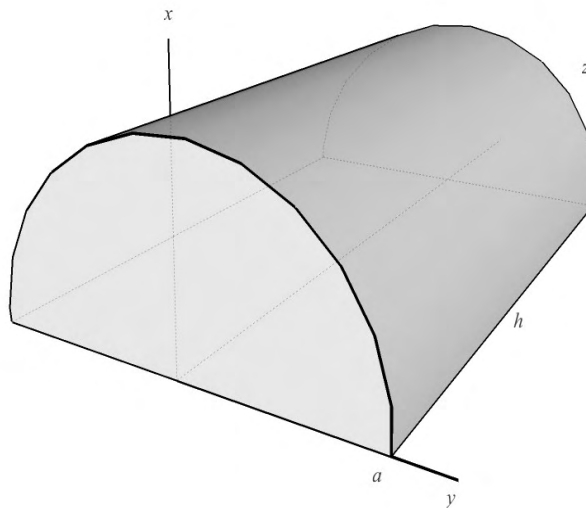
Au final, la pression totale en un point de coordonnées $(r; \psi; z)$ exprimée après extinction de la source, s'écrit comme la somme des pressions portées par chacun des modes, soit :

$$p(r; \psi; z; t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |\hat{A}'_{mnp}| J_m\left(\frac{\chi_{mn}}{a} r\right) \cos(m\psi - \psi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{h} z\right) \cos(\omega_{mnp} t - \phi_{mnp}) \quad (1.10)$$

Notons que la pression portée par le mode particulier $m=0, n=0$ et $p=0$ est uniforme et ne fluctue pas au cours du temps ($\omega_{000}=0$). En conséquence, il ne contribue pas au champ de pression acoustique.

2) Champ de pression dans un demi-cylindrique, en l'absence de source

On suppose maintenant une salle de la forme d'un demi-cylindre de **rayon a** et de **longueur h** et l'on considère comme dans le problème précédent que toutes les parois sont parfaitement rigides, c'est-à-dire d'impédances infinies (condition aux frontières de Neumann). C'est le même problème que pour le cylindre entier mais les conditions aux frontières suivant la composante ψ changent puisque l'angle n'est défini que de $-\pi/2$ à $\pi/2$.



La fonction de Neumann est encore une fois à exclure de l'expression de la solution (B7) car le champ de pression est fini en $r = 0$ sur l'axe Oz du cylindre. Par ailleurs, on montre comme précédemment, en appliquant les conditions aux frontières en $z = 0$ et $z = h$, que la pression s'écrit :

$$\hat{p}(r; \psi; z; t) = \hat{A}'_0 J_v(k_w r) [\cos(v\psi) + \hat{R}_2 \sin(v\psi)] \cos(k_{zp} z) e^{j\omega t} \quad (2.00)$$

$$\text{avec } k_{zp} = \frac{p\pi}{h} \quad p = 0, 1, 2 \dots$$

La condition de Neumann appliquée sur la paroi latérale en $\psi = -\pi/2$ s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \hat{p}(r; \psi; z)}{\partial \psi} \right|_{\psi = -\pi/2} = 0$$

qui donne après simplification

$$\sin\left(v \frac{\pi}{2}\right) + \hat{R}_2 \cos\left(v \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.01)$$

De même, en $\psi = \pi/2$, on a

$$\frac{\partial \hat{p}(r; \psi; z)}{\partial \psi} \Big|_{\psi = \pi/2} = 0$$

soit

$$-\sin\left(v \frac{\pi}{2}\right) + \hat{R}_2 \cos\left(v \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.02)$$

Les deux conditions (2.01) et (2.02) donnent :

$$\hat{R}_2 = \tan\left(v \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(v \frac{\pi}{2}\right)$$

ce qui imposent nécessairement que $\hat{R}_2 = 0$

Il reste

$$\sin\left(v \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

d'où

$$v = 0, 2, 4 \dots \text{nécessairement pair}$$

Le nombre v est un nombre entier pair, noté maintenant $2m$ (avec $m=0, 1, 2$). L'équation (1.02) s'écrit alors :

$$\boxed{\hat{p}(r; \psi; z; t) = \hat{A}'_0 J_{2m}(k_w r) \cos(2m\psi) \cos(k_{zp} z) e^{j\omega t}} \quad (2.03)$$

Enfin, la condition de Neumann appliquée sur la paroi circulaire en $r = a$ s'écrit :

$$\frac{\partial \hat{p}(r; \psi; z)}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

qui aboutie, comme dans le cas de la salle cylindrique, à :

$$J'_{2m}(k_w a) = 0$$

En notant les valeurs numériques des zéros des **fonctions dérivées de Bessel d'ordre paire**, $\chi_{(2m)n}$, il vient :

$$k_w = \frac{\chi_{(2m)n}}{a} \quad (2.04)$$

D'après l'équation (B8), l'**équation de dispersion** associée à l'équation de propagation est :

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} = k_w^2 + k_z^2$$

qui s'écrit encore en fonction des indices entiers m , n et p

$$k_{mnp}^2 = \frac{\omega_{mnp}^2}{c_0^2} = \left(\frac{\chi_{(2m)n}}{a} \right)^2 + k_{zp}^2 = \left(\frac{\chi_{(2m)n}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h} \right)^2 \quad (2.05)$$

Les pulsations et fréquences propres sont données par :

$$\omega_{mnp} = c_0 \sqrt{\left(\frac{\chi_{(2m)n}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h} \right)^2} \quad (2.06)$$

$$f_{mnp} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\chi_{(2m)n}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h} \right)^2} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{\chi_{(2m)n}}{\pi a} \right)^2 + \left(\frac{p}{h} \right)^2} \quad (2.07)$$

Les fréquences propres circulaires (f_{mn0}) sont deux fois moins nombreuses que pour une salle cylindrique entière puisqu'elles se déterminent avec les zéros des fonctions dérivées d'ordre pair seulement !

La pression portée par un mode mnp s'écrit :

$$\hat{p}_{mnp}(r; \psi; z; t) = \hat{A}'_{mnp} J_{2m}(k_w r) \cos(2m\psi) \cos(k_{zp} z) e^{j\omega_{mnp} t} \quad (2.08)$$

Puis la pression acoustique réelle est:

$$p_{mnp}(r; \psi; z; t) = |\hat{A}'_{mnp}| J_{2m}\left(\frac{\chi_{(2m)n}}{a} r\right) \cos(2m\psi) \cos\left(\frac{p\pi}{h} z\right) \cos(\omega_{mnp} t - \varphi_{mnp}) \quad (2.09)$$

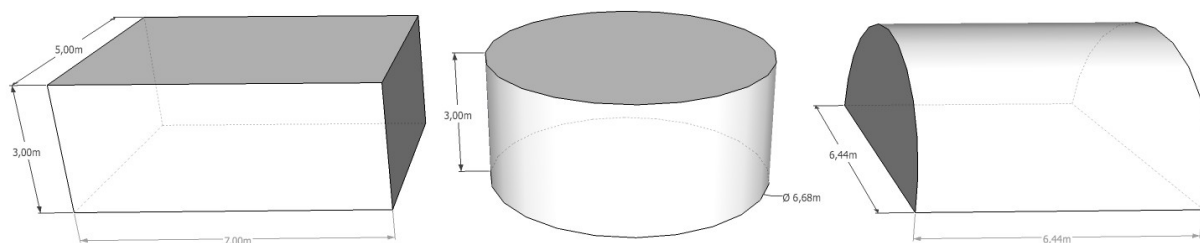
$$\text{pour } 0 \leq z \leq h, \quad -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2 \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq a$$

Enfin, la pression totale en un point de coordonnées $(r; \psi; z)$ exprimée après extinction de la source, s'écrit comme la somme des pressions portées par chacun des modes, soit :

$$p(r; \psi; z; t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |\hat{A}'_{mnp}| J_{2m}\left(\frac{\chi_{(2m)n}}{a} r\right) \cos(2m\psi) \cos\left(\frac{p\pi}{h} z\right) \cos(\omega_{mnp} t - \varphi_{mnp}) \quad (2.10)$$

3) Salle parallélépipédique versus salles à géométrie cylindrique !

Comparons maintenant les fréquences propres d'une salle parallélépipédique avec celles des salles cylindriques, à volume égal. Dans l'exemple qui suit, les trois volumes étudiés font 105 m^3 pour une superficie au sol de 35 m^2 sauf pour le demi-cylindre couché dont la superficie au sol est de $41,5 \text{ m}^2$. Ces salles sont petites au sens acoustique, puisque la première fréquence propre de chacune d'elles sera située au delà de 20 Hz , c'est-à-dire dans l'audible. On se restreint, dans cet exemple, à ne calculer que les fréquences propres en dessous 100 Hz .



Les fréquences propres sont données, dans chacune des géométries, par les relations suivantes :

- Salle **parallélépipédique** de dimensions $L \times l \times h$:

$$f_{mnp} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{l}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2}$$

- Salle **cylindrique** de rayon a et de hauteur h :

$$f_{mnp} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{\chi_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2}$$

- Salle **demi-cylindrique** de rayon a et de longueur h :

$$f_{vnp} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{\chi_{vn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2} \quad \text{avec } v = 0, 2, 4 \dots$$

où χ_{vn} correspond aux zéros des fonctions dérivées de Bessel (voir annexe A). Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous, avec $c_0 = 341$ m/s :

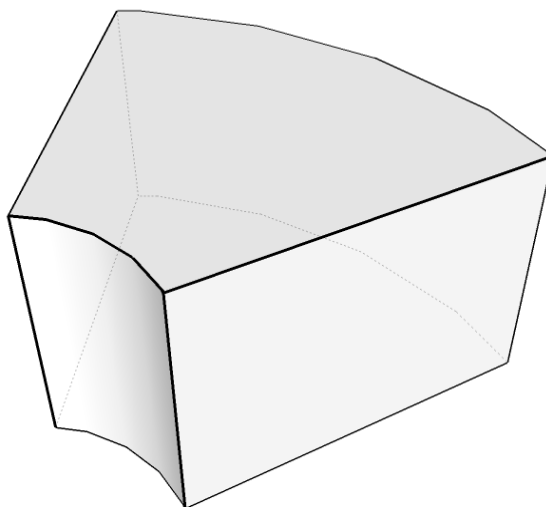
Parallélépipède		Cylindre		Demi-cylindre	
L= 7,00 m l= 5,00 m h=3,00 m		a=3,34 m et h=3,00 m		a=3,22 m et h=6,44 m	
V= 105 m³					
S _{paroi} =142 m²		S _{paroi} =133 m²		S _{paroi} =107 m²	
Indice <i>mnp</i>	<i>f_{mnp}</i> (en Hz)	Indice <i>mnp</i>	<i>f_{mnp}</i> (en Hz)	Indice <i>vnp</i>	<i>f_{vnp}</i> (en Hz)
100	24,4	100	29,9	001	26,5
010	34,1	200	49,6	200	51,4
110	41,9	001	56,8	002	53
200	48,7	010	62,2	201	57,8
001	56,8	101	64,2	202	73,8
210	59,5	300	68,2	003	79,4
101	61,8	201	75,4	400	89,7
011	66,3	400	86,4	401	93,5
020	68,2	110	86,6	203	94,6
111	70,6	301	88,8	402	104,1
120	72,4	401	103,5		
211	82,3				
220	83,8				
121	92,1				
311	98,7				
320	100,0				
15 modes sous 100 Hz		10 modes sous 100 Hz		9 modes sous 100 Hz	
Écart type de l'écart :3,35		Écart type de l'écart :6,15		Écart type de l'écart :6,71	

On observe une plus grande densité de modes dans la salle en forme de « boîte à chaussures ». Les modes sont davantage proches les uns des autres que dans les salles cylindriques. D'un point de vue qualitatif, cet aspect est un avantage pour le parallélépipède puisque cette densité de modes favorise le lissage de la courbe amplitude-fréquence. A contrario, dans les salles cylindriques, le champ stationnaire devrait être plus marqué et la fréquence de Schroeder, qui détermine le passage du champ modal au champ diffus, repoussée vers le haut du spectre. L'écart type indiqué en fin de tableau correspond à l'écart quadratique moyen entre deux fréquences propres successives, qui passe du simple au double, entre la boîte à chaussure et le demi-cylindre couché!

3) Salle en « éventail »

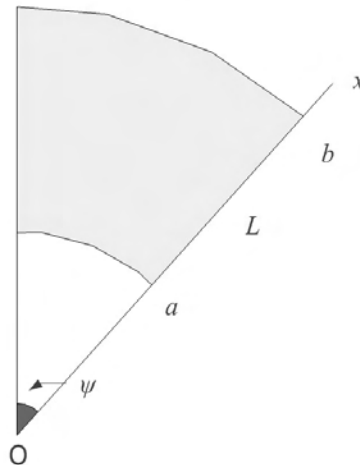
On se propose maintenant de prédire le champ de pression acoustique stationnaire existant dans une salle en éventail, forme que l'on rencontre couramment dans les salles de spectacles.

De plus, un local à base trapézoïdale est qualitativement plus adapté qu'un autre de la forme parallélépipédique. Si la forme en trapèze est plutôt favorable à l'acoustique, pour diverses raisons comme celle de la réduire le risque d'écho flottant, l'on peut s'interroger sur l'efficacité d'une telle géométrie pour la réduction des modes stationnaires. L'idée est alors de comparer les champs de pression, dans ce volume particulier avec celui de la « boîte à chaussures ».



La géométrie trapézoïdale peut être approchée par une forme en éventail, qui présente l'avantage de pouvoir se modéliser à l'aide de l'équation des ondes en coordonnées cylindriques.

Le trapèze de base peut, en première approximation, s'approcher en faisant varier l'angle au centre ψ_1 et les rayons, intérieur et extérieur, respectivement notés a et b .



La solution de l'équation des ondes en pression en coordonnées cylindriques, à variable séparée de la forme $p(r; \psi; z; t) = R(r) \Psi(\psi) Z(z) T(t)$ est encore donnée par l'expression B7 (voir annexe B) :

$$\hat{p}(r; \psi; z; t) = \hat{A}_0 [J_v(k_w r) + \hat{R}_1 N_v(k_w r)] [\cos(v\psi) + \hat{R}_2 \sin(v\psi)] [\cos(k_z z) + \hat{R}_3 \sin(k_z z)] e^{j\omega t} \quad (3.00)$$

On conserve l'hypothèse des parois parfaitement rigides d'impédances infinies afin d'appliquer aux frontières du domaine la condition de Neumann.

La solution est identique à (1.08) excepté que la fonction de Neumann N_v est maintenant conservée car $r = 0$ n'appartient plus au domaine d'étude. On a donc une solution de la forme :

$$\hat{p}(r; \psi; z; t) = \hat{A}_0 [J_v(k_w r) + \hat{R}_1 N_v(k_w r)] [\cos(v\psi - \psi_0)] [\cos(k_{zp} z)] e^{j\omega t} \quad (3.01)$$

$$\text{pour } 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \psi \leq \psi_1 \quad \text{et} \quad 0 < a \leq r \leq b$$

avec

$$k_{zp} = \frac{p\pi}{h} \quad \text{avec } p = 0, 1, 2 \dots$$

La condition de Neumann appliquée sur la paroi latérale en $\psi = 0$ s'écrit :

$$-\frac{\partial \hat{p}(r; \psi; z)}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} = 0$$

soit

$$-v \sin(v\psi - \psi_0) \Big|_{\psi=0} \hat{p}(r; z) = 0$$

puis encore

$$v \sin(\psi_0) = 0$$

ce qui impose $\psi_0 = 0$

De même en $\psi = \psi_1$, on a :

$$\frac{\partial \hat{p}(r; \psi; z)}{\partial \psi} \Big|_{\psi=\psi_1} = 0$$

soit

$$-v \sin(v\psi_1) \hat{p}(r; z) = 0$$

d'où

$$\boxed{v = \frac{n\pi}{\psi_1}} \text{ avec } n = 0, 1, 2 \dots (3.02)$$

Remarquons que l'angle au centre ψ_1 peut toujours s'exprimer par une fraction de π . Ainsi les nombres v ne sont plus nécessairement des nombres entiers. Par exemple, avec $\psi_1 = \frac{d\pi}{q}$, d et q étant entier, on trouve $v = \frac{q}{d} n$.

Remarquons que dans le cas particulier où $d=1$, v est un nombre entier multiple de q .

Par exemple, avec $\psi_1 = \frac{\pi}{5}$, $v = 0, 5, 10, 15 \dots$

Enfin, la condition de Neumann, sur les parois circulaires, s'écrit :

$$-\frac{\partial \hat{p}(r; \psi; z)}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{p}(r; \psi; z)}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0$$

qui donnent

$$J'_\nu(k_w a) + \hat{R}_1 N'_\nu(k_w a) = 0 \quad (3.03)$$

et

$$J'_\nu(k_w b) + \hat{R}_1 N'_\nu(k_w b) = 0 \quad (3.04)$$

Ces deux équations permettent de déterminer la constante R_1 et une condition sur le nombre « d'onde » k_w dont découleront les fréquences propres.

En faisant usage de la relation de récurrence (A15) figurant annexe A :

$$F'_m(x) = \frac{m}{x} F_m(x) - F_{m+1}(x) \quad (A15)$$

(3.03) et (3.04) deviennent :

$$\frac{\nu}{k_w a} J_\nu(k_w a) - J_{\nu+1}(k_w a) + \hat{R}_1 \left[\frac{\nu}{k_w a} N_\nu(k_w a) - N_{\nu+1}(k_w a) \right] = 0 \quad (3.03)$$

$$\frac{\nu}{k_w b} J_\nu(k_w b) - J_{\nu+1}(k_w b) + \hat{R}_1 \left[\frac{\nu}{k_w b} N_\nu(k_w b) - N_{\nu+1}(k_w b) \right] = 0 \quad (3.04)$$

Nous voilà bien embarrassés! Le recours à l'aide d'un spécialiste semble s'imposer.

Toute aide sera bien venue!

Annexe A

Fonctions de Bessel cylindriques

(Friedrich Wilhelm, 1784-1846, allemand)

L'équation de Bessel est une équation linéaire homogène du second ordre de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0} \quad (\text{A1})$$

où x est la variable, y la fonction inconnue et ν **un paramètre pouvant être complexe**.

La solution, notée $Z_\nu(x)$, prend plusieurs formes suivant la nature du nombre ν . On distingue trois cas :

- ν est un nombre **non entier**

Dans ce cas la solution générale de l'équation de Bessel est :

$$Z_\nu(x) = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x) \quad (\text{A2})$$

qui est une combinaison linéaire des **fonctions de Bessel** cylindriques de première espèce, notées J_ν et $J_{-\nu}$, (A et B étant deux constantes).

où
$$\boxed{J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}} \quad \text{avec} \quad \Gamma(a+1) = a! \quad (\text{A3})$$

La fonction de Bessel peut être approximée, lorsque $|x| \rightarrow \infty$ et $\Re(x) > 0$ ($\Re$ signifiant partie réelle), par :

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right] \quad (\text{A4})$$

En pratique, l'on peut utiliser cette approximation dès lors que $x \gg \left| \nu^2 - \frac{1}{4} \right|$

Dans ces conditions, la fonction de Bessel a le comportement d'une fonction cosinus

- ν est un nombre entier

Si ν est un nombre entier, les fonctions J_ν et $J_{-\nu}$ deviennent linéairement dépendantes :

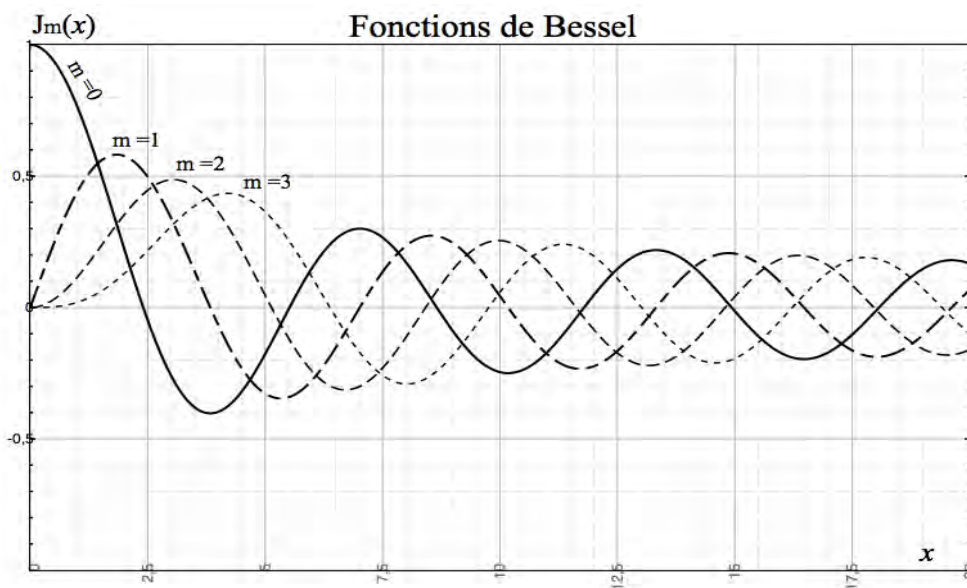
$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x) \quad \text{si } \nu \text{ entier}$$

La fonction de Bessel s'écrit alors, avec $\nu = m$ entier :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}}{k!(k+m)!} \quad (\text{A5})$$

Lorsque $x \rightarrow 0$ et $\nu = m$ entier, le développement au premier ordre de la fonction de Bessel cylindrique est :

$$J_m(x) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \quad (\text{A6})$$



Fonctions de Bessel de première espèce pour $\nu = m$ entier

- ν est un nombre **quelconque entier ou non**

La solution générale de l'équation de Bessel dans le cas où ν est un nombre complexe quelconque entier ou non, prend deux formes équivalentes:

$$\boxed{Z_\nu(x) = A J_\nu(x) + B N_\nu(x)} \quad (\text{A7})(\text{forme stationnaire})$$

qui est une combinaison linéaire de la fonction de Bessel cylindrique de première espèce d'ordre ν , J_ν , et de la **fonction de Neumann** N_ν d'ordre ν (ou dite fonction de Bessel de deuxième espèce).

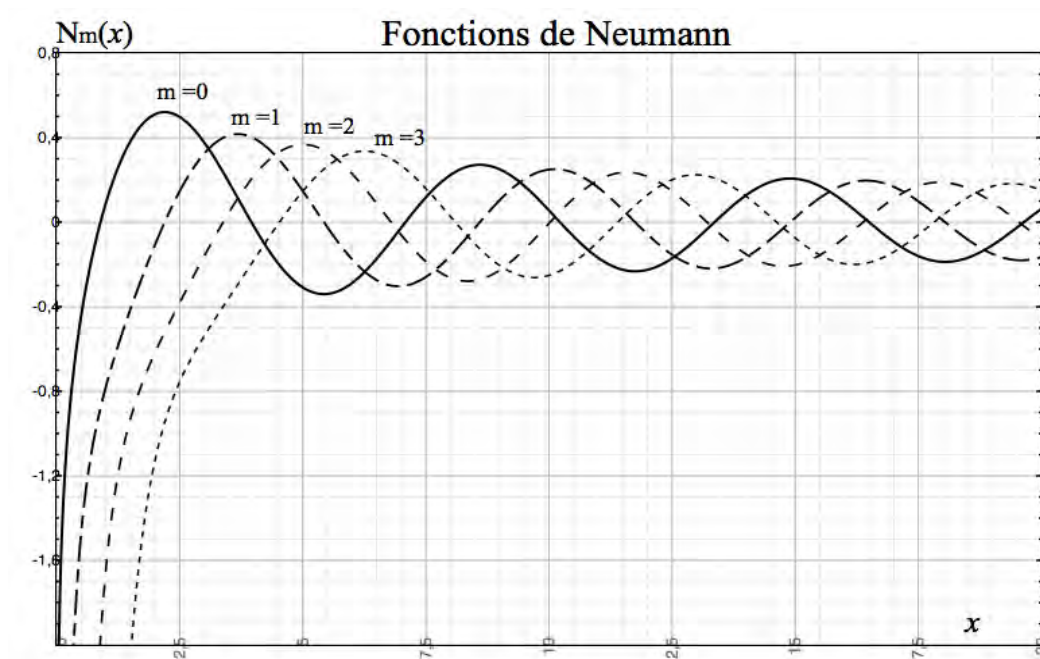
La fonction de Neumann N_ν étant elle-même une combinaison de fonction de Bessel :

$$N_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)} \quad (\text{A8})$$

La fonction de Neumann peut être approximée, lorsque $|x| \rightarrow \infty$ et $\Re(x) > 0$, par :

$$N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left[x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right] \quad (\text{A9})$$

La fonction de Neumann a le comportement d'une fonction sinus



Fonctions de Neumann pour $\nu = m$ entier

Par ailleurs, lorsque $x \rightarrow 0$ et $\nu = m$ entier, le développement au premier ordre de la fonction de Neumann est :

$$N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right), \text{ ou } \gamma \text{ désigne la constante d'Euler } (\gamma = 1,781)$$

$$N_m(x) \approx -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m, \text{ pour } m > 0$$

$$\blacksquare \quad \boxed{Z_\nu(x) = A H_\nu^{(1)}(x) + B H_\nu^{(2)}(x)} \quad \text{(forme propagative)(A10)}$$

qui est une combinaison linéaire des **fonctions de Hankel** $H_\nu^{(1)}$ et $H_\nu^{(2)}$

avec

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{j}{\sin(\pi x)} [e^{-j\nu\pi} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)] = J_\nu(x) + j N_\nu(x) \quad (\text{A11})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{-j}{\sin(\pi x)} [e^{j\nu\pi} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)] = J_\nu(x) - j N_\nu(x) \quad (\text{A12})$$

Les fonctions de Hankel peuvent être approximées, lorsque $|x| \rightarrow \infty$ et $\Re(x) > 0$, par :

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j[x - \frac{\pi}{2}(\nu + \frac{1}{2})]} \quad (\text{A13})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j[x - \frac{\pi}{2}(\nu + \frac{1}{2})]} \quad (\text{A14})$$

La fonction $H_\nu^{(1)}$ a un caractère propagatif dans le sens des x décroissants (onde convergente) et la fonction $H_\nu^{(2)}$ a un caractère propagatif dans le sens des x croissants (onde divergente) avec la convention temporelle $\exp(j\omega t)$. Si la convention $\exp(-j\omega t)$ est choisie, c'est $H_\nu^{(1)}$ qui devient divergente et vis-versa.

Par ailleurs, lorsque $x \rightarrow 0$ et $\nu = m$ entier, le développement au premier ordre des fonctions de Hankel sont :

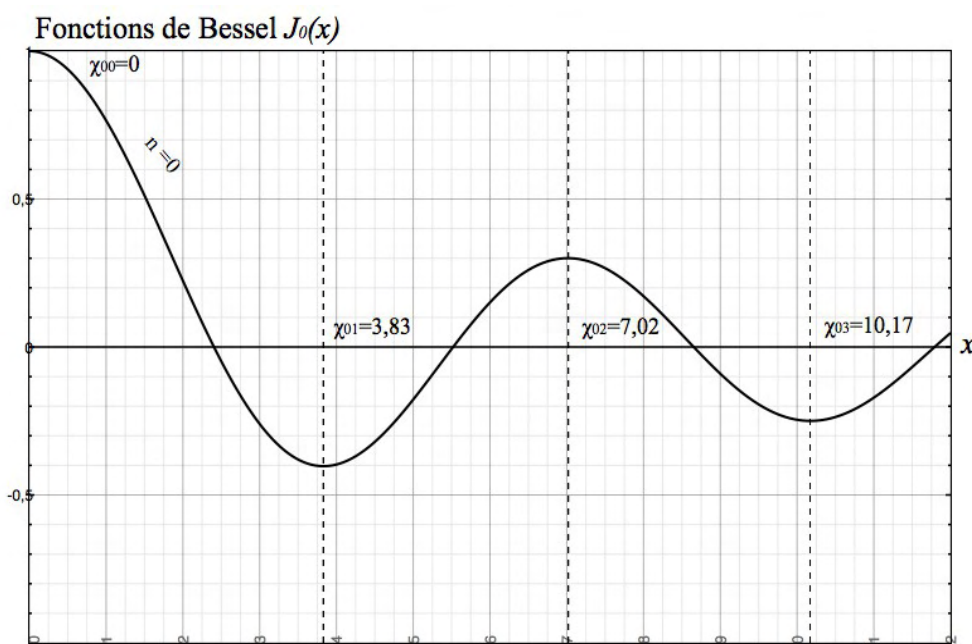
- Zéro des dérivées des fonctions de Bessel cylindriques

Les zéros sont donnés par l'équation $J'_\nu(x) = 0$ où $J'_\nu(x)$ est la fonction dérivée. Ils correspondent aux extremum des fonctions de Bessel $J_\nu(x)$. On note leur valeur numérique $\chi_{\nu n}$.

La table ci-dessous indique le $(n+1)$ ième zéro $\chi_{\nu n}$ de J'_ν , correspondant au $(n+1)$ ième extremum de J_ν .

$n \rightarrow$	0	1	2	3	4
$\nu \downarrow$					
0	0,00	3,83	7,02	10,17	13,32
1	1,84	5,33	8,54	11,71	14,86
2	3,05	6,71	9,97	13,17	16,35
3	4,20	8,02	11,35	14,59	17,90
4	5,32	9,28	11,35	14,59	19,20
1/2	1,16	4,60	7,70	11,00	14,10
2/3	1,40	4,85	8,05	12,20	14,35

Par exemple, les premiers extremum de la fonction $J_0(x)$ seront $\chi_{01}=3,83$, $\chi_{02}=7,02$ et $\chi_{03}=10,17$



Notons que lorsque ν et n sont grands $\chi_{mn} \approx \pi \left(\nu + \frac{n}{2} - \frac{3}{4} \right)$

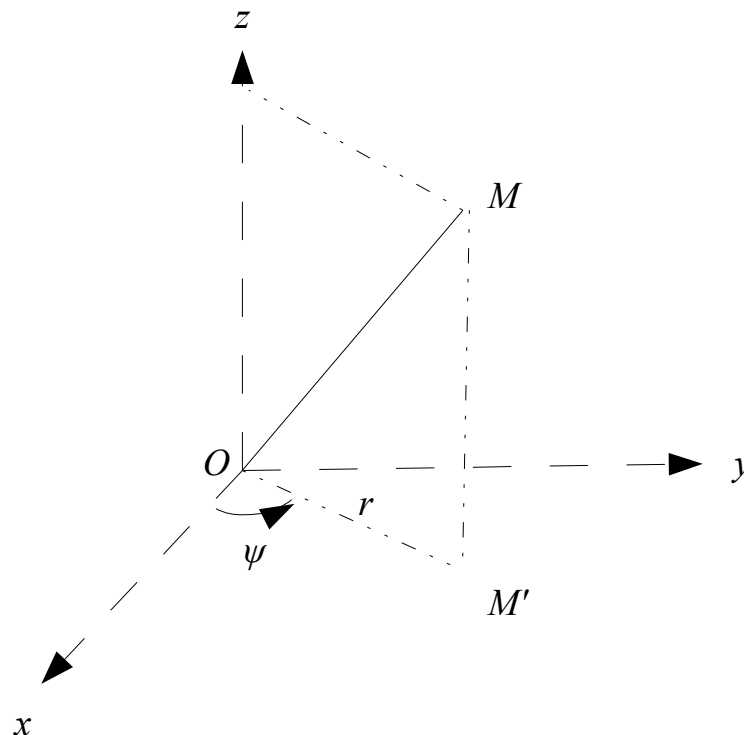
- Relation de récurrence

Les fonctions de Bessel, de Neumann et de Hankel vérifient toute la relation :

$$F'_m(x) = \frac{m}{x} F_m(x) - F_{m+1}(x) \quad (\text{A15})$$

Annexe B

Équation des ondes en coordonnées cylindriques



L'équation des ondes en coordonnées cylindriques en dehors de la présence d'une source s'écrit :

$$\Delta p(r; \psi; z; t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p(r; \psi; z; t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B1})$$

où Δ est l'opérateur Laplacien qui s'écrit en coordonnées cylindriques comme suit :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On recherche une solution à variables séparées de la forme :

$$p(r; \psi; z; t) = R(r) \Psi(\psi) Z(z) T(t) \quad (\text{B2})$$

En injectant la solution (B2) dans l'équation (B1) et divisant par $R(r)\Psi(\psi)Z(z)T(t)$, il vient :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{1}{Tc_0^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0$$

soit encore

$$\boxed{\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{Tc_0^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -k_0^2} \quad (B3)$$

Cela n'est possible que si les deux membres de l'équation (B3) sont égaux à une seule et même constante, notée $-k_0^2$, par exemple. Car l'égalité doit être vérifiée quelle que soit les valeurs des variables spatiales et de la variable temporelle t .

En posant $\omega^2 = k_0^2 c_0^2$, on a :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0}$$

Équation dont la solution dans le domaine complexe s'écrit :

$$\hat{T}(t) = \hat{G} e^{j\omega t} + \hat{H} e^{-j\omega t}$$

Comme le temps est une grandeur orientée, il convient de choisir $\hat{G}$ ou $\hat{H}$ nulle, c'est-à-dire de ne conserver que le terme en ωt ou bien celui en $-\omega t$. Ici nous imposons arbitrairement $\hat{H} = 0$ pour ne conserver que le terme ωt . Il en découle que la fonction temporelle, sous sa forme complexe, est :

$$\boxed{\hat{T}(t) = \hat{G} e^{j\omega t}}$$

$\hat{G}$ étant une amplitude complexe pouvant comprendre un terme de phase.

La constante $\hat{G}$ étant un facteur arbitraire multiplié par d'autres facteurs arbitraires, on l'omettra par la suite afin de ne pas alourdir inutilement les écritures.

On procède de la même façon avec les variables d'espaces. De l'équation (B3), on tire aisément :

$$\boxed{-\left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} + k_0^2\right) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_z^2} \quad (B4)$$

Égalité qui doit être vérifiée quelles que soient les valeurs, des variables spatiales r et ψ et de la variable z . Cela n'est possible que si les deux premiers membres de l'équation (B4) sont égaux à une seule et même constante, notée $-k_z^2$, d'où :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z = 0$$

Équation dont les solutions, dans le domaine réel et complexe, s'écrivent :

$$\hat{Z}(z) = \hat{E} \cos(k_z z) + \hat{F} \sin(k_z z)$$

$$\hat{Z}(z) = \hat{E}' e^{jk_z z} + \hat{F}' e^{-jk_z z}$$

De l'équation (B4), il vient :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} = k_z^2 - k_0^2$$

soit encore en posant $k_w^2 = k_0^2 - k_z^2$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} = -k_w^2$$

puis en multipliant cette dernière expression par r^2

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} = -k_w^2 r^2$$

d'où

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} = -k_w^2 r^2 - \left(\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -v^2 \quad (B5)$$

Égalité qui doit être vérifiée quelles que soient les valeurs, de la variable r et de la variable ψ . Cela n'est possible que si les deux premiers membres de l'équation (B5) sont égaux à une seule et même constante, notée $-v^2$, d'où :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} + v^2 \Psi = 0$$

Équation dont les solutions, dans le domaine réel et complexe, s'écrivent :

$$\hat{\Psi}(\psi) = \hat{C} \cos(v\psi) + \hat{D} \sin(v\psi)$$

$$\hat{\Psi}(\psi) = \hat{C}' e^{jv\psi} + \hat{D}' e^{-jv\psi}$$

Enfin, l'équation (B5) peut s'écrire encore

$$k_w^2 r^2 + \left(\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \right) = v^2$$

soit encore en divisant cette dernière expression par r^2 puis en la multipliant par R , il vient après réarrangement :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(k_w^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) R = 0$$

soit encore en posant $s = k_w r$, puis après un bref calcul :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial R}{\partial s} + \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) R = 0$$

qui n'est autre que **l'équation de Bessel** (voir annexe A) dont les solutions sont :

$$R_v(s) = \hat{A} J_v(s) + \hat{B} N_v(s)$$

ou

$$R_v(s) = \hat{A}' H_v^{(1)}(s) + \hat{B}' H_v^{(2)}(s)$$

où J_v est la **fonction de Bessel** cylindrique de première espèce d'ordre v , N_v la **fonction de Neumann** d'ordre v et $H_v^{(1)}$ et $H_v^{(2)}$ sont les **fonctions de Hankel**.

La solution $R(k_w r)$ s'écrit alors :

$$R_v(k_w r) = \hat{A} J_v(k_w r) + \hat{B} N_v(k_w r)$$

ou

$$R_v(k_w r) = \hat{A}' H_v^{(1)}(k_w r) + \hat{B}' H_v^{(2)}(k_w r)$$

La solution de l'équation des ondes en coordonnées cylindriques peut s'écrire sous plusieurs formes en reportant les diverses expressions des fonctions R , Ψ , Z et T dans (B2).

Par exemple, sous sa forme circulaire, adapté aux champs stationnaires :

$$\hat{p}(r; \psi; z; t) = [\hat{A} J_v(k_w r) + \hat{B} N_v(k_w r)] [\hat{C} \cos(v\psi) + \hat{D} \sin(v\psi)] [\hat{E} \cos(k_z z) + \hat{F} \sin(k_z z)] e^{j\omega t} \quad (\text{B6})$$

En mettant $\hat{A}$, $\hat{C}$ et $\hat{E}$ en facteur devant chaque crochet et en posant $\hat{A}_0 = \hat{A} \hat{C} \hat{E}$, $\hat{R}_1 = \frac{\hat{B}}{\hat{A}}$, $\hat{R}_2 = \frac{\hat{D}}{\hat{C}}$ et $\hat{R}_3 = \frac{\hat{F}}{\hat{E}}$, il vient aisément :

$$\hat{p}(r; \psi; z; t) = \hat{A}_0 [J_v(k_w r) + \hat{R}_1 N_v(k_w r)] [\cos(v\psi) + \hat{R}_2 \sin(v\psi)] [\cos(k_z z) + \hat{R}_3 \sin(k_z z)] e^{j\omega t} \quad (\text{B7})$$

Au final, la solution de l'équation des ondes en coordonnées cylindriques dépend de quatre constantes arbitraires $\hat{A}_0$, $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ et $\hat{R}_3$.

L'équation de dispersion associée à l'équation de propagation est :

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} = k_w^2 + k_z^2 \quad (\text{B8})$$

Signalons que k_0 n'est pas un nombre d'onde, qui n'est défini que pour des ondes planes monochromatiques. Cependant, localement, on peut l'identifier k_0 à un nombre d'onde.

Dans ce cas, par analogie avec le vecteur d'onde plane, on écrit que :

$$\vec{k} = k_r(r) \vec{e}_r + k_\psi(r) \vec{e}_\psi + k_z \vec{e}_z$$

et

$$k_0^2 = k_r^2(r) + k_\psi^2(r) + k_z^2$$

soit encore d'après (B7)

$$k_w^2 = k_r^2(r) + k_\psi^2(r) = k_0^2 - k_z^2$$

Bibliographies :

- *Audio* de Mario Rossi (Édition Presse polytechniques et universitaires Romandes)
- *Acoustique générale Équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluides et solides, application* de Catherine Potel et Michel Bruneau (édition ellipse)
- *Cours CNAM ACC208 « acoustique approfondie »* d'Alexandre Garcia
- Cours de « *Mathématiques de l'ingénieur* » de Rémi Vaillancourt (Université d'Ottawa)
- Site : *promenadesmaths.free.fr* de Frédéric Laroche
- *Éléments d'acoustique générale, de quelques lieux communs de l'acoustique à une première maîtrise des champs sonores* de Vincent Martin (Édition Presse polytechniques et universitaires romandes)
- *Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs* d'Élie Belorizky (Édition EDP sciences)