

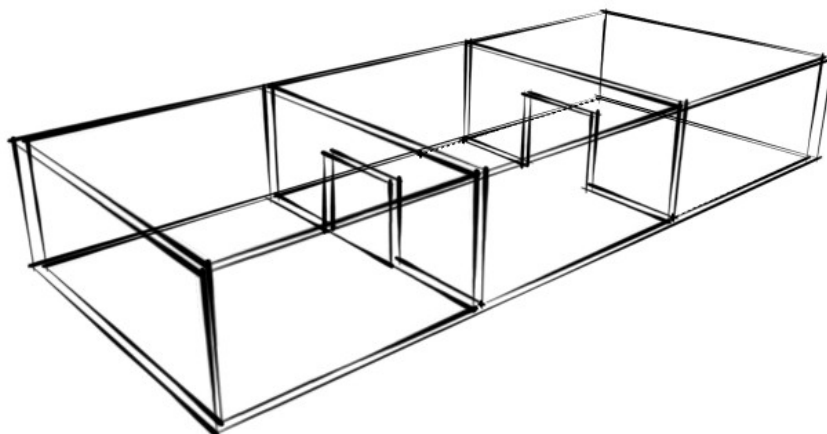
Décroissance temporelle des niveaux de pression réverbérée dans des salles couplées triples disposées en série.

Frédéric Poirrier
Décembre 2011-Décembre 2012

Cet exposé s'adresse à un public averti déjà familiarisé avec les notions d'acoustique des salles. On aborde ici la décroissance temporelle des niveaux sonores réverbérés dans trois salles couplées. Il propose dans un premier temps de donner la méthode de résolution du système d'équations différentielles inhérent au problème. Les solutions du système donnent les lois de la décroissance temporelle des niveaux réverbérés dans chacune des trois salles après arrêt de l'émission d'une source sonore. Ensuite, par un exemple numérique, on mettra en évidence l'importance de la prise en compte du couplage triple dans l'estimation des temps de réverbération. On donnera, pour clore l'exposé, les équations correspondantes à une situation de trois salles couplées disposées en parallèle.

1/ Méthode de résolution

Considérons trois salles couplées alignées comme le montre la figure ci-dessous, la source sonore de puissance E étant placée dans la salle 1. La salle 2 centrale, qui ne contient pas de source est attenante à la salle 1 et à la salle 3. La salle 3, ne contenant pas de source, est couplée avec la salle 2. On se place dans les hypothèses du champ diffus de Sabine.



Posons:

Pour la **salle source 1**:

- E puissance de la source en W.
- V_1 volume de la salle en m^3 .
- A_1 absorption équivalente de Sabine en m^2 .
- S_{12} surface de couplage entre la salle 1 et la salle 2, en m^2 .

Pour la **salle 2**:

- V_2 volume de la salle.
- A_2 absorption équivalente de Sabine.
- S_{23} surface de couplage entre la salle 2 et la salle 3.

Pour la **salle 3**:

- V_3 volume de la salle.
- A_3 absorption équivalente de Sabine.

ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 désignent les densités d'énergie réverbérées respectivement dans les salles 1, 2 et 3, exprimées en $J.m^{-3}$.

En posant:

$$A_{11} = A_1 + S_{12} ; \quad A_{22} = A_2 + S_{12} + S_{23} ; \quad A_{33} = A_3 + S_{23}$$

et après un bilan des puissances instantanées dans chaque salle après extinction de la source, on obtient les équations fondamentales ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{cA_{11}\epsilon_1}{4} - \frac{cS_{12}\epsilon_2}{4} = 0 \\ V_2 \frac{d\epsilon_2}{dt} + \frac{cA_{22}\epsilon_2}{4} - \frac{cS_{12}\epsilon_1}{4} - \frac{cS_{23}\epsilon_3}{4} = 0 \\ V_3 \frac{d\epsilon_3}{dt} + \frac{cA_{33}\epsilon_3}{4} - \frac{cS_{23}\epsilon_2}{4} = 0 \end{array} \right.$$

On cherche des solutions de la forme:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{01} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \epsilon_2 = \epsilon_{02} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \epsilon_3 = \epsilon_{03} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où ε_{01} , ε_{02} , ε_{03} et τ sont des constantes à déterminer.

Par substitution, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{c}{4} A_{11} - \frac{V_1}{\tau} \right) \varepsilon_{01} - \frac{c}{4} S_{12} \varepsilon_{02} + 0 = 0 \\ - \frac{c}{4} S_{12} \varepsilon_{01} + \left(\frac{c}{4} A_{22} - \frac{V_2}{\tau} \right) \varepsilon_{02} - \frac{c}{4} S_{23} \varepsilon_{03} = 0 \\ 0 - \frac{c}{4} S_{23} \varepsilon_{02} + \left(\frac{c}{4} A_{33} - \frac{V_3}{\tau} \right) \varepsilon_{03} = 0 \end{array} \right.$$

Le système n'a de solutions non nulles que si le déterminant formé par les coefficients ε_{0i} est nul:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{c}{4} A_{11} - \frac{V_1}{\tau} \right) & -\frac{c}{4} S_{12} & 0 \\ -\frac{c}{4} S_{12} & \left(\frac{c}{4} A_{22} - \frac{V_2}{\tau} \right) & -\frac{c}{4} S_{23} \\ 0 & -\frac{c}{4} S_{23} & \left(\frac{c}{4} A_{33} - \frac{V_3}{\tau} \right) \end{vmatrix} = 0$$

On obtient ainsi l'équation caractéristique du système :

$$\left(\frac{c A_{11}}{4} - \frac{V_1}{\tau} \right) \left(\left(\frac{c A_{22}}{4} - \frac{V_2}{\tau} \right) \left(\frac{c A_{33}}{4} - \frac{V_3}{\tau} \right) - \left(\frac{c S_{23}}{4} \right)^2 \right) - \left(\frac{c A_{33}}{4} - \frac{V_3}{\tau} \right) \left(\frac{c S_{12}}{4} \right)^2 = 0$$

Il est pratique d'utiliser un tableur ou un « grapheur » pour résoudre cette équation du troisième degré d'inconnue τ . Les solutions que l'on espère distinctes et réelles, homogènes à un temps, sont notées τ_1 , τ_2 et τ_3 .

La solution générale du système s'écrit alors:

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_{11} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \varepsilon_{12} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \varepsilon_{13} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$$

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_{21} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \varepsilon_{22} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \varepsilon_{23} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$$

$$\varepsilon_3(t) = \varepsilon_{31} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \varepsilon_{32} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \varepsilon_{33} e^{-\frac{t}{\tau_3}}$$

La détermination des coefficients ε_{ij} s'effectue à partir des conditions initiales.

A l'instant $t=0$, les niveaux réverbérés dans les salles correspondent aux niveaux stationnaires notés pour les trois salles ε_{10} , ε_{20} , et ε_{30} .

Les niveaux stationnaires se calculent d'après les relations suivantes :

$$\Delta = A_{11}A_{22}A_{33} - S_{12}^2A_{33} - S_{23}^2A_{11}$$

$$\varepsilon_{10} = 4 \frac{E(A_{22}A_{33} - S_{23}^2)}{c\Delta}$$

$$\varepsilon_{20} = 4 \frac{E(S_{12}A_{33})}{c\Delta}$$

$$\varepsilon_{30} = 4 \frac{E(S_{12}S_{23})}{c\Delta}$$

D'autre part, dans la salle source à l'instant initial, on a une loi de décroissance de la forme :

$$\varepsilon_1(t) = \frac{4E}{cA} e^{-\frac{Act}{4V_1}}$$

$$\text{et } \frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{E}{V_1} \text{ à } t=0$$

Alors que dans les salles 2 et 3, on a aucun effet visible de la décroissance à l'instant initial. Les dérivées sont nulles:

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = 0 \text{ à } t=0$$

$$\frac{d\varepsilon_3}{dt} = 0 \text{ à } t=0$$

De même, il est cohérent que considérer les dérivées secondes nulles à l'instant initial.

$$\frac{d^2\varepsilon_i}{dt^2} = 0 \text{ à } t=0 \text{ pour } i=1, 2 \text{ et } 3$$

Au final, on a trois systèmes d'équations à trois inconnues à résoudre pour déterminer les coefficients ε_{ij} .

Dans la salle source 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} = \varepsilon_{10} \\ -\frac{1}{\tau_1}\varepsilon_{11} - \frac{1}{\tau_2}\varepsilon_{12} - \frac{1}{\tau_3}\varepsilon_{13} = -\frac{E}{V_1} \\ \frac{1}{\tau_1^2}\varepsilon_{11} + \frac{1}{\tau_2^2}\varepsilon_{12} + \frac{1}{\tau_3^2}\varepsilon_{13} = 0 \end{array} \right.$$

Et dans les salles 2 et 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} = \varepsilon_{20} \\ -\frac{1}{\tau_1}\varepsilon_{21} - \frac{1}{\tau_2}\varepsilon_{22} - \frac{1}{\tau_3}\varepsilon_{23} = 0 \\ \frac{1}{\tau_1^2}\varepsilon_{21} + \frac{1}{\tau_2^2}\varepsilon_{22} + \frac{1}{\tau_3^2}\varepsilon_{23} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{30} \\ -\frac{1}{\tau_1}\varepsilon_{31} - \frac{1}{\tau_2}\varepsilon_{32} - \frac{1}{\tau_3}\varepsilon_{33} = 0 \\ \frac{1}{\tau_1^2}\varepsilon_{31} + \frac{1}{\tau_2^2}\varepsilon_{32} + \frac{1}{\tau_3^2}\varepsilon_{33} = 0 \end{array} \right.$$

Les densités d'énergie volumiques peuvent s'exprimer en décibels à l'aide de la relation :

$$L_{P_{Ri}} = 10 \log \frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_{ref}} \text{ avec } \varepsilon_{ref} = 2,94 \cdot 10^{-15} \text{ Jm}^{-3}$$

Au final, les niveaux réverbérés dans chaque salle s'écrivent :

$$L_{P_1} = 10 \log \left(\varepsilon_{11} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \varepsilon_{12} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \varepsilon_{13} e^{-\frac{t}{\tau_3}} \right) + 145,3$$

$$L_{P_2} = 10 \log \left(\varepsilon_{21} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \varepsilon_{22} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \varepsilon_{23} e^{-\frac{t}{\tau_3}} \right) + 145,3$$

$$L_{P_3} = 10 \log \left(\varepsilon_{31} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \varepsilon_{32} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \varepsilon_{33} e^{-\frac{t}{\tau_3}} \right) + 145,3$$

Remarquons que la méthode est généralisable à plus de trois salles ainsi qu'aux salles bouclées. Toutes les configurations sont envisageables et le système d'équations différentielles s'établit toujours à partir d'un bilan de puissance dans chaque local. Cependant, la méthode de calcul pour les salles disposées en série présente une bonne cohérence avec les mesures réalisées in situ à condition toutefois que la source ne soit pas dans la pièce centrale.

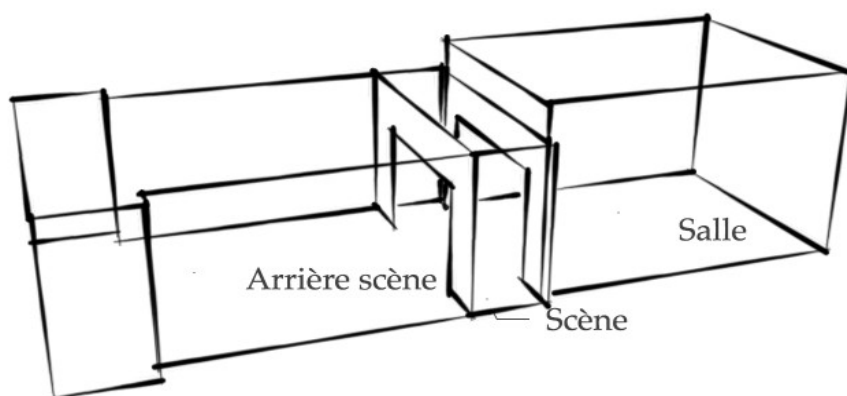
2/ Exemple numérique

Envisageons maintenant une situation numérique. Résolvons, par exemple, le système figurant dans le problème du *théâtre de l'Ostankino palace* du livre *Exercices et problèmes résolus d'acoustique des salles et sonorisation* de Jacques Jouhaneau, .

Il s'agit de déterminer le temps de réverbération de chaque salle pour une source située sur l'arrière scène. Les données du problème sont les suivantes:

Pour le local **source 1, arrière scène:**

- E puissance 1 mW.
- $V_1 = 2080 \text{ m}^3$.
- $A_1 = 98 \text{ m}^2$.
- S_{12} surface de couplage (salle 1/ salle 2) 50 m^2 .



Pour le local 2, scène:

- $V_2 = 420 \text{ m}^3$
- $A_2 = 80 \text{ m}^2$.
- S_{23} surface de couplage (salle 2 /salle 3) 50 m^2 .

Pour le local 3, salle:

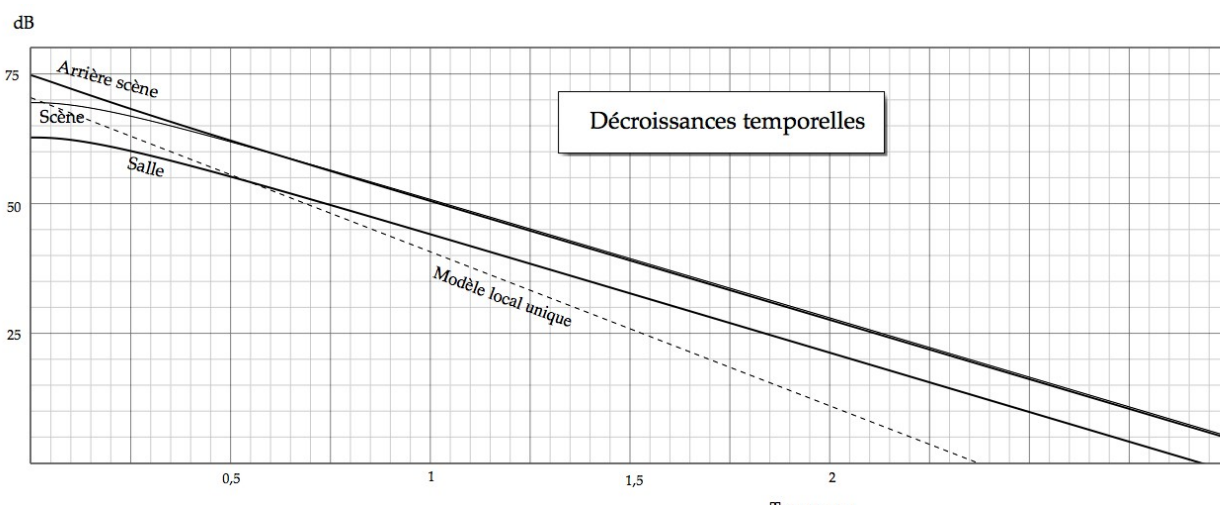
- $V_3 = 2000 \text{ m}^3$
- $A_2 = 184 \text{ m}^2$.

Pour la résolution des équations, on a tout intérêt à se confectionner des outils de calculs numériques.

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous:

Indices	i	1	2	3	Unités
Constantes de temps	τ_i	26,4	107,5	189,8	ms
Densités d'énergies stationnaires	ε_{0i}	88,3	26,1	5,57	10^{-9} Jm^{-3}
Niveaux stationnaires	L_{Ri}	74,8	69,5	62,8	dB
Constantes systèmes	ε_{1i}	-2,88	27,2	64	10^{-9} Jm^{-3}
Constantes systèmes	ε_{2i}	1,37	-45,2	69,9	10^{-9} Jm^{-3}
Constantes systèmes	ε_{3i}	0,29	-9,64	14,9	10^{-9} Jm^{-3}
Temps de réverbération	$TR_i(60)$	2,57	2,81	2,80	s

Les courbes de décroissance temporelle du niveau de pression réverbérée pour les trois salles couplées sont construites dans le repère ci-dessous.



Remarquons ici que les temps de réverbération des locaux récepteurs sont calculés au strict sens mathématique, c'est-à-dire pour une décroissance du niveau réverbéré de 0 à -60 dB. Or, il existe un temps de latence entre le local source et les locaux récepteurs, l'origine des temps étant prise à l'extinction de la source sonore dans le local source.

Par ailleurs, on constate que même si la salle est beaucoup plus absorbante que l'arrière scène, pour autant, le temps de réverbération de la salle est supérieur à celui de l'arrière scène. On a donc un transfert d'énergie de la pièce la plus claire vers la pièce la plus mate.

Le modèle local unique figurant sur le graphique considère que les trois salles couplées forment une seule et même pièce de volume 4500 m^3 et l'absorption 362 m^2 . Le temps de réverbération, suivant

la formule de Sabine **local unique** donne $1,99 \text{ s}$, à comparer directement avec les temps de réverbération obtenus pour l'arrière-scène, la scène et la salle, respectivement $2,57 \text{ s}$, $2,81 \text{ s}$ et $2,80 \text{ s}$ donnés par la résolution du système d'équations différentielles.

Par curiosité, comparons avec les temps de réverbération donnés par la formule de Sabine, **local isolé** dans deux modèles : l'un avec une absorption A_{ii} et l'autre avec une absorption ramenée A_{app} des deux salles couplées.

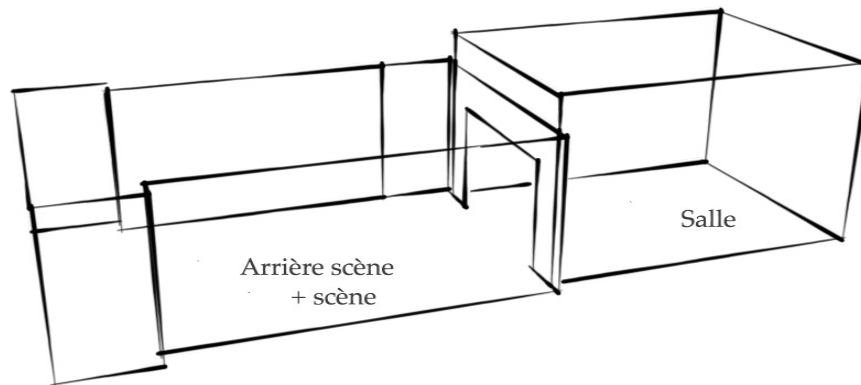
On a, sans détailler les calculs :

Local	Arrière scène	Scène	Salle
TR(60) coulage triple	$2,57 \text{ s}$	$2,81 \text{ s}$	$2,80 \text{ s}$
TR(60) local isolé, d'absorption A_{ii}	$2,25 \text{ s}$	$0,37 \text{ s}$	$1,37 \text{ s}$
TR(60) local isolé, d'absorption A_{app}	$2,52 \text{ s}$	$0,44 \text{ s}$	$1,46 \text{ s}$

Attention toutefois, l'hypothèse de calcul local isolé n'a guère de sens physique même si parfois les valeurs semblent indiquer le contraire, notamment lorsque les surfaces de couplage sont importantes. Seule la résolution mathématique du système d'équations différentielles des salles couplées est valide car c'est l'unique façon de prendre en compte les échanges d'énergies entre les locaux.

Maintenant, mettons en comparaison le modèle couplé triple avec le modèle simplifié salles couplées doubles qui en pratique est plus facile à mettre en œuvre.

Considérons l'arrière scène et la scène comme un local unique de volume $V_1 + V_2$ soit 2500 m^3 et d'absorption $A_1 + A_2$ soit 178 m^2 , couplé à la salle de volume $V_3 = 2000 \text{ m}^3$ et d'absorption $A_3 = 184 \text{ m}^2$ par une surface S de 50 m^2 . Les lecteurs intéressés par la méthode de calcul se tourneront vers l'ouvrage *Acoustiques des salles et sonorisation* de Jacques Jouhaneau où l'auteur donne une méthode de résolution analytique très détaillée. Cependant l'approche purement mathématique présentée en introduction dans cet article pour trois salles est évidemment valide pour deux pièces couplées.



Dans le cas du couplage double, le système homogène associé est alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{cA_{11}}{4} - \frac{V_1}{\tau} \right) \varepsilon_{01} - \frac{cS}{4} \varepsilon_{02} = 0 \\ - \frac{cS}{4} \varepsilon_{01} + \left(\frac{cA_{22}}{4} - \frac{V_2}{\tau} \right) \varepsilon_{02} = 0 \end{cases}$$

L'équation caractéristique qui en découle s'écrit :

$$\left(\frac{cA_{11}}{4} - \frac{V_1}{\tau} \right) \left(\frac{cA_{22}}{4} - \frac{V_2}{\tau} \right) - \left(\frac{cS}{4} \right)^2 = 0$$

Les solutions sont données par :

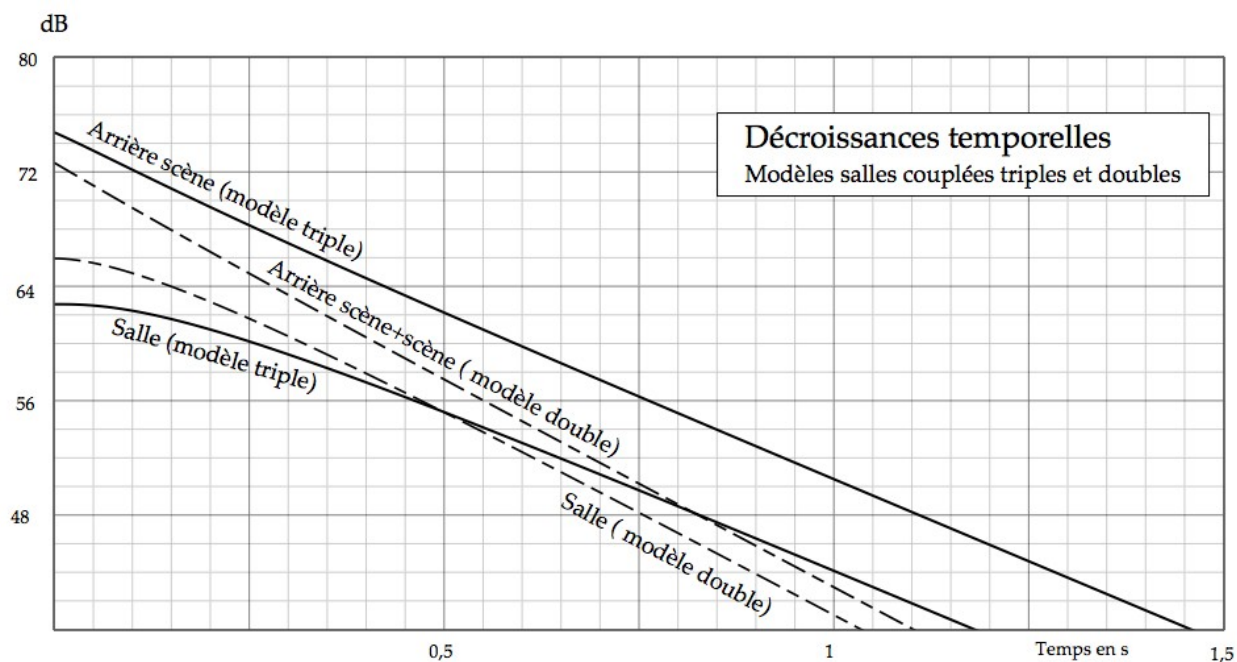
$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_{11} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \varepsilon_{12} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_{21} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \varepsilon_{22} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Les résultats des calculs sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Indices	i	1	2	Unités
Constantes de temps	τ_i	150,3	90,6	ms
Densités d'énergies stationnaires	ϵ_{0i}	54,1	11,6	10^{-9} Jm^{-3}
Niveaux stationnaires	L_{Ri}	72,1	65,9	dB
Constantes systèmes	ϵ_{1i}	45,1	9,06	10^{-9} Jm^{-3}
Constantes systèmes	ϵ_{2i}	29,1	-17,5	10^{-9} Jm^{-3}
Temps de réverbération	$TR_i(60)$	2,06	2,20	s

Le graphique suivant montre les courbes de décroissances temporelles dans les deux modèles :



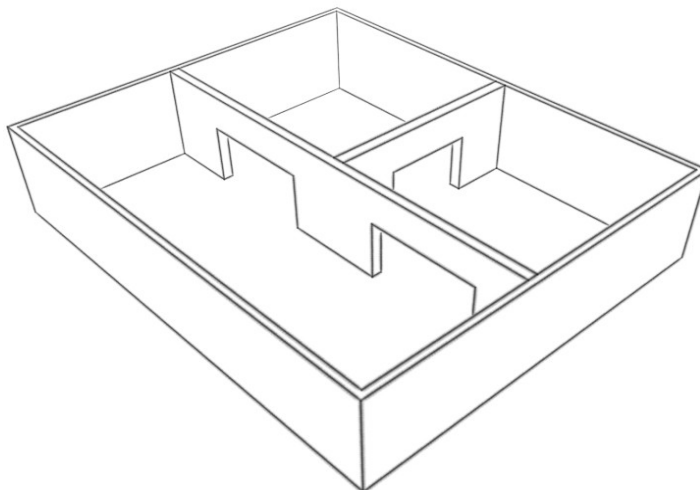
En résumé, nous avons :

	Local source	Local récepteur
Couplage triple	Arrière scène $TR(60) = 2,57 s$	Salle $TR(60) = 2,80 s$
Couplage double	Arrière scène + scène $TR(60) = 2,06 s$	Salle $TR(60) = 2,20 s$

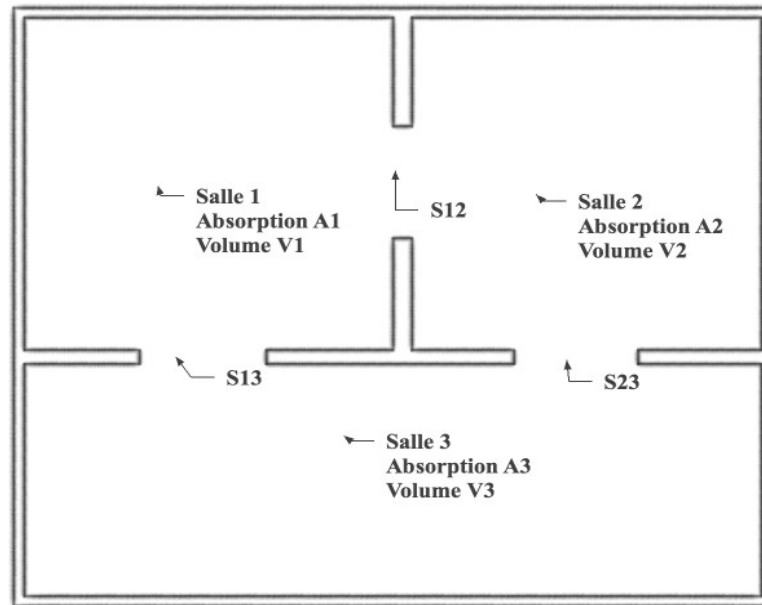
On remarquera, que l'hypothèse simplificatrice du couplage double minimise de manière importante les temps de réverbération dans les locaux source et récepteur.

En pratique, il convient donc d'être prudent avec les modèles de calculs simplifiés pour l'estimation des temps de réverbération dans les locaux couplés multiples.

3/ Salles disposées en parallèle



La méthode de résolution est strictement identique à celle décrite précédemment. Seules les équations initiales du système sont différentes ainsi que les relations donnant les niveaux stationnaires dans chaque salle avant extinction de la source.



En posant:

$$A_{11} = A_1 + S_{12} + S_{13}; \quad A_{22} = A_2 + S_{12} + S_{23}; \quad A_{33} = A_3 + S_{13} + S_{23}$$

et après un bilan des puissances instantanées dans chaque salle après extinction de la source, on obtient les équations fondamentales ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{cA_{11}\epsilon_1}{4} - \frac{cS_{12}\epsilon_2}{4} - \frac{cS_{13}\epsilon_3}{4} = 0 \\ V_2 \frac{d\epsilon_2}{dt} + \frac{cA_{22}\epsilon_2}{4} - \frac{cS_{12}\epsilon_1}{4} - \frac{cS_{23}\epsilon_3}{4} = 0 \\ V_3 \frac{d\epsilon_3}{dt} + \frac{cA_{33}\epsilon_3}{4} - \frac{cS_{13}\epsilon_1}{4} - \frac{cS_{23}\epsilon_2}{4} = 0 \end{array} \right.$$

L'équation caractéristique du système s'écrit maintenant :

$$\left(\frac{cA_{11}}{4} - \frac{V_1}{\tau}\right)\left(\frac{cA_{22}}{4} - \frac{V_2}{\tau}\right)\left(\frac{cA_{33}}{4} - \frac{V_3}{\tau}\right) - \left(\frac{cS_{23}}{4}\right)^2\left(\frac{cA_{11}}{4} - \frac{V_1}{\tau}\right) - \left(\frac{cS_{12}}{4}\right)^2\left(\frac{cA_{33}}{4} - \frac{V_3}{\tau}\right) - \left(\frac{cS_{13}}{4}\right)^2\left(\frac{cA_{22}}{4} - \frac{V_2}{\tau}\right) - 2\left(\frac{c}{4}\right)^3 S_{12}S_{13}S_{23} = 0$$

A noter que si $S_{13}=0$, on revient sur une situation où les salles sont disposées en série et on retrouve bien l'équation caractéristique correspondante.

Les niveaux stationnaires dans chaque salle se calculent d'après les relations suivantes où E est la puissance de la source sonore omnidirectionnelle disposée dans la salle source d'indice 1 :

$$\Delta = A_{11}A_{22}A_{33} - S_{23}^2A_{11} - S_{13}^2A_{22} - S_{12}^2A_{33}$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{4E}{c\Delta} (A_{22}A_{33} - S_{23}^2) \quad \varepsilon_{20} = \frac{4E}{c\Delta} (A_{33}S_{12} + S_{13}S_{23}) \quad \varepsilon_{30} = \frac{4E}{c\Delta} (A_{22}S_{13} + S_{12}S_{23})$$

Pour le reste, la démarche est strictement identique à celle décrite pour les trois salles disposées en série.

Remerciement à monsieur Jacques Jouhaneau pour son aide précieuse.

Bibliographies :

Acoustique des salles et sonorisation de Jacques Jouhaneau (Collection CNAM édition TEC & DOC)

Acoustique des salles et sonorisation, Exercices et problèmes résolus de Jacques Jouhaneau (Collection CNAM édition TEC & DOC)

Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs d'Élie Belorizky (Collection Grenoble sciences EDP sciences)