

Loi de Snell-Descartes

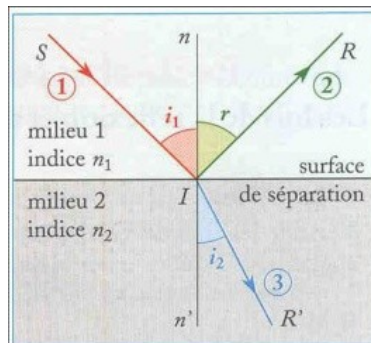
Frédéric Poirrier
Mars 2013

On se propose dans cet exposé de donner un exemple de l'application de la loi de Snell-Descartes à la propagation d'un rayon sonore à travers l'atmosphère. Dans un premier temps on rappellera succinctement la loi de Snell-Descartes puis ensuite on utilisera la loi de la réfraction pour établir l'équation de la trajectoire d'un rayon sonore dans l'air. Pour finir, on rappellera sommairement quelques équations fondamentales de la thermodynamique afin d'établir un modèle mathématique simple de célérité du son dans l'air en fonction de l'altitude.

1/ Loi de Snell-Descartes

En optique, il est d'usage d'écrire la loi de Snell-Descartes en fonction des indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux de propagation.

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$



L'indice de réfraction n_i du milieu i est défini en fonction de la célérité de la lumière dans le vide notée c_0 et la célérité de la lumière dans le milieu d'indice i notée c_i .

$$n_i = \frac{c_0}{c_i}$$

Une autre écriture possible de loi de la réfraction en fonction des vitesses dans les milieux est :

$$\frac{\sin(i_1)}{c_1} = \frac{\sin(i_2)}{c_2}$$

Cette dernière expression est souvent préférée en acoustique.

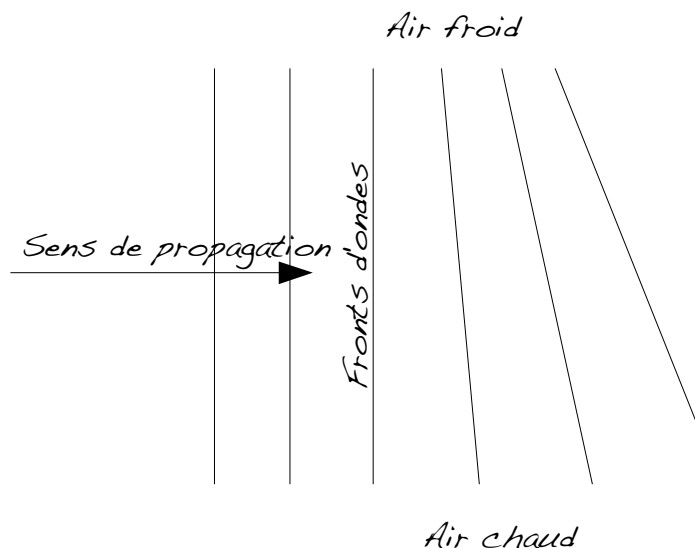
2/ Equation de la trajectoire d'un rayon sonore dans l'air

On admettra que la célérité d'une onde sonore, en première approximation, est de la forme :

$$c = 20 \sqrt{T}$$

où T est la température en Kelvin du milieu de propagation.

Lorsqu'une onde se propage dans l'air dont la température n'est pas constante, comme dans la situation schématisée ci-dessous, le front d'onde est dévié vers le côté «froid», c'est-à-dire du côté où la vitesse de propagation est la plus faible. La direction d'un rayon sonore « tourne » toujours du côté froid dans une atmosphère stable.



En extérieur, et sauf phénomène météorologique particulier, la température de l'air décroît avec l'altitude et par conséquent la célérité du son aussi. On supposera que la célérité du son c est une fonction affine décroissante de l'altitude z, telle que :

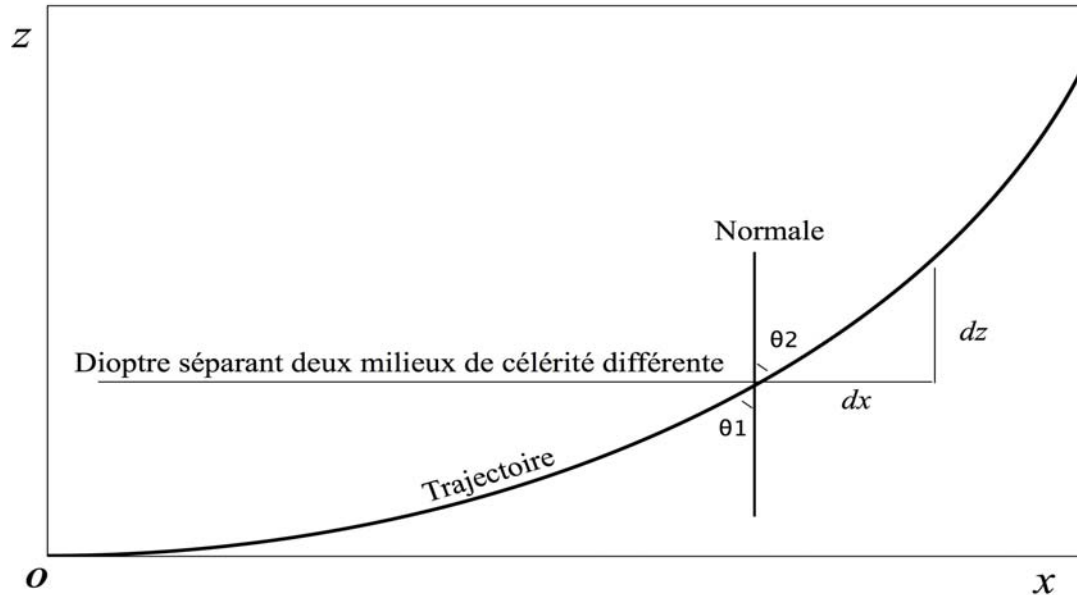
$$c(z) = c_0(1 - \alpha z) \quad (0)$$

où c_0 est la vitesse de propagation à une altitude de référence prise arbitrairement ici à l'altitude zéro et α est un coefficient positif.

Un rayon sonore issu d'une source placée à proximité du sol aura tendance à dévier sa trajectoire vers le haut.

On peut appliquer la loi de la réfraction en tous points de sa trajectoire.

$$\frac{\sin(\theta_1)}{c_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{c_2}$$



et plus particulièrement au point d'origine $z = 0$. Dans ce cas, posons $\theta_1 = \theta_0$ et $\theta_2 = \theta$, il vient :

$$\frac{\sin(\theta_0)}{c_0} = \frac{\sin(\theta)}{c(z)}$$

Avec $c(z) = c_0(1 - \alpha z)$ la relation devient :

$$\sin(\theta) = (1 - \alpha z) \sin(\theta_0)$$

Par ailleurs, en raisonnant dans le triangle rectangle lié à une variation infinitésimale du point de la trajectoire, on a :

$$\sin(\theta) = \cos(90^\circ - \theta) = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}}$$

Soit encore en mettant $(dz)^2$ en facteur :

$$\sin(\theta) = \frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}}$$

Au final, la trajectoire du rayon sera décrite par l'intégration de l'équation suivante :

$$\frac{\frac{dx}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}} = (1 - \alpha z) \sin(\theta_0)$$

Élevons cette équation au carré :

$$\frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1} = (1 - \alpha z)^2 \sin^2(\theta_0)$$

Après réarrangement, on obtient :

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{(1 - \alpha z)^2 \sin^2(\theta_0)}{1 - (1 - \alpha z)^2 \sin^2(\theta_0)}$$

puis en passant à la racine et en ne considérant que le terme positif :

$$\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{(1 - \alpha z) \sin(\theta_0)}{\sqrt{1 - (1 - \alpha z)^2 \sin^2(\theta_0)}}$$

Cette expression est de la forme $\frac{U'}{\sqrt{U}}$ qui n'est autre que la dérivée de $\sqrt{U}$. La recherche de la primitive est alors directe :

$$x = \frac{1}{\alpha \sin(\theta_0)} \sqrt{1 - (1 - \alpha z)^2 \sin^2(\theta_0)} + K$$

K étant la constante d'intégration que l'on détermine avec la condition $x = 0$ pour $z = 0$ d'où :

$$K = \frac{-1}{\alpha \sin(\theta_0)} \sqrt{1 - \sin^2(\theta_0)} = \frac{-\cos(\theta_0)}{\alpha \sin(\theta_0)}$$

Au final, l'équation de la trajectoire du rayon sonore est donnée par :

$$x = \frac{1}{\alpha \sin(\theta_0)} \sqrt{1 - (1 - \alpha z)^2 \sin^2(\theta_0)} - \frac{1}{\alpha \tan(\theta_0)}$$

Soit en réarrangeant encore une fois :

$$\left(x + \frac{l}{\alpha \tan(\theta_0)}\right)^2 + \left(z - \frac{l}{\alpha}\right)^2 = \frac{l}{\alpha^2 \sin^2(\theta_0)}$$

On reconnaît l'expression de l'équation d'un cercle de rayon $R = \frac{l}{\alpha \sin(\theta_0)}$ et dont le centre a pour coordonnées $\left(\frac{-l}{\alpha \tan(\theta_0)}; \frac{l}{\alpha}\right)$

La trajectoire d'un rayon sonore dans une atmosphère stable, c'est-à-dire en dehors de toute perturbation (vent, inversion de température ...), **est un arc de cercle.**

Dans le cas particulier où le rayon a initialement une direction horizontale, c'est-à-dire lorsque l'angle d'incidence est rasant $\theta_0 \rightarrow 90^\circ$ le rayon du cercle est $R = \frac{l}{\alpha}$ et les coordonnées du centre sont $\left(0; \frac{l}{\alpha}\right)$. Cette situation correspond à celle décrite sur le schéma.

3/ Gradient de température

On cherche à connaître le gradient de température en fonction de l'altitude z .

L'air ayant une faible conductivité thermique, on peut considérer que les détentes et compressions lors de la propagation s'effectuent de manière adiabatique et réversible, suivant la loi :

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte$$

T et p désignant la température et la pression de la masse d'air en équilibre adiabatique et γ étant le rapport des chaleurs massiques de l'air.

En différenciant cette expression, on obtient :

$$p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} dT + \frac{1-\gamma}{\gamma} p^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} dp = 0$$

puis en divisant par $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$$\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp}{p} = 0 \quad (1)$$

Par ailleurs, l'équation fondamentale de l'hydrostatique s'écrit :

$$dp = -\rho g dz \quad (2)$$

Pour une mole d'air la masse volumique ρ s'exprime en fonction de la masse molaire M et du volume molaire V : $\rho = \frac{M}{V}$

Et en supposant l'air comme étant un gaz parfait, on peut écrire pour une mole que $V = \frac{RT}{p}$

En substituant ρ puis V dans l'expression (2), il vient :

$$\frac{dp}{p} = \frac{-M}{RT} g dz \quad (3)$$

En combinant les expressions (1) et (3) on obtient au final le gradient de température « adiabatique »:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{Mg}{R} \frac{1-\gamma}{\gamma} \quad (4)$$

En supposant g et γ constants avec l'altitude :

- $M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$
- $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$
- $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$
- $\gamma = 1,4$

On trouve :

$$\frac{dT}{dz} = -9,77 \cdot 10^{-3} \text{ Km}^{-1}$$

On admet que dans la troposphère, c'est-à-dire pour une altitude inférieure à 11 km et en l'absence de perturbation, **la température décroît de 9,8 °C par kilomètre.**

4/ Gradient de célérité

Cherchons maintenant la valeur numérique de α .

On supposera qu'à l'altitude $z = 0$, la température est $T_0 = 283 \text{ K}$ (10°C).

En intégrant l'équation (4) on obtient l'expression de la température en fonction de l'altitude :

$$T(z) = T_0 \left(1 + \frac{Mg}{RT_0} \frac{1-\gamma}{\gamma} z \right)$$

Comme $c(T) = 20 \sqrt{T}$

Il vient alors que :

$$c(z) = c_0 \sqrt{1 + \frac{Mg}{RT_0} \frac{1-\gamma}{\gamma} z} \quad (5)$$

avec $c_0 = 20 \sqrt{T_0} = 336,5 \text{ m/s}$

Cette dernière expression diffère de $c(z) = c_0(1 - \alpha z)$. Cependant comme $\frac{Mg}{RT_0} \frac{1-\gamma}{\gamma} z \ll 1$, on peut utiliser le développement limité : $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$.

L'équation (5) devient alors :

$$c(z) \approx c_0 \left(1 + \frac{Mg}{2RT_0} \frac{1-\gamma}{\gamma} z \right) \quad (6)$$

En identifiant (6) avec $c(z) = c_0(1 - \alpha z)$, on trouve que:

$$\alpha \approx \frac{Mg}{2RT_0} \frac{1-\gamma}{\gamma}$$

soit :

$$\alpha \approx 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

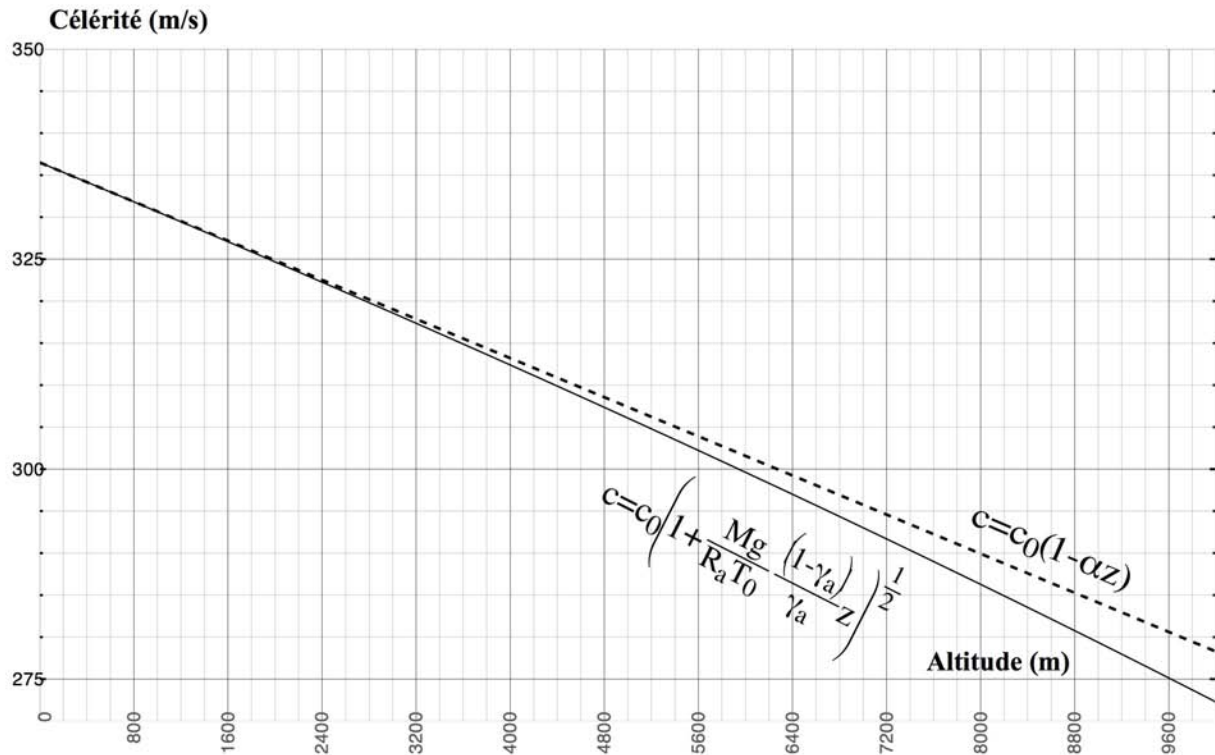
Le gradient de célérité est donné par dérivation de l'équation (6) :

$$\frac{dc}{dz} = -c_0 \alpha$$

$$\frac{dc}{dz} = 5,82 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad \text{avec } c_0 = 336,5 \text{ m/s}$$

La célérité du son décroît de 5,8 m/s par kilomètre.

Le graphique figurant ci-dessous compare le modèle de célérité approximé par la fonction affine (avec $\alpha \approx 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$) avec le modèle décrit par l'équation (5). L'erreur commise sur la célérité à l'altitude de 10 000 m est de l'ordre de 2%.



Le modèle de la célérité de la forme $c(z) = c_0(1 - \alpha z)$ est le seul qui permet de trouver une solution analytique au problème initial de la trajectoire d'un rayon sonore dans l'atmosphère.

Dans le cas particulier où le rayon sonore a initialement une direction horizontale ($\theta_0 \rightarrow 90^\circ$), le rayon de l'arc de cercle est donné par $R = \frac{1}{\alpha}$ et vaut 57 800 m.

Bibliographies :

Initiation à l'acoustique d'Antonio Fischetti (édition Belin Sup)
Cours du CNAM, d'Alexandre Garcia, ACC109 « *Application de l'acoustique en milieu industriel* »
Thermodynamique d'Hubert Lombroso (Editeur Mc Graw-Hill)