

La Formule de Sabine

Frédéric Poirrier
Juin 2012

La plus célèbre des formules de l'acoustique date de 1898 et fut établie par Wallace Clement Sabine (1868-1919), considéré comme le père fondateur de l'acoustique architecturale. À l'époque, il est professeur de physique à l'université de Harvard et il avait observé lors de ses recherches que le son dans une pièce fermée se prolongeait après arrêt de l'émission sonore et que cela pouvait nuire à la bonne intelligibilité du message à diffuser. Ce sont les multiples réflexions dans le local qui prolongent la persistance du son, phénomène plus généralement nommé réverbération.

La formule de Sabine s'écrit sous sa forme usuelle :

$$TR = \frac{0,16 V}{A}$$

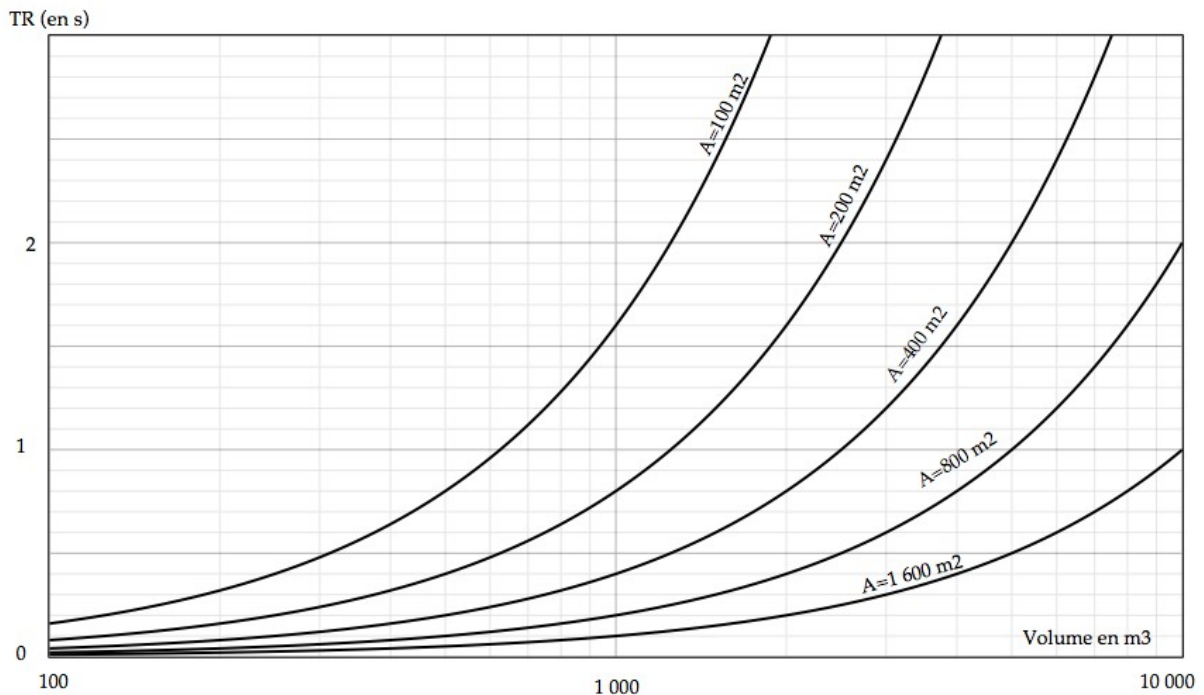
où V est le volume de la salle en m^3 et A l'aire d'absorption équivalente de Sabine, exprimée en m^2 . L'absorption équivalente totale de la salle est définie comme la somme des absorptions des surfaces qui la constituent :

$$A = \sum S_i \alpha_i$$

α_i étant le coefficient d'absorption de l'élément de parois considéré.

Enfin, TR est l'abréviation de **T**emps de **R**éverbération qui correspond à la durée nécessaire, en seconde, pour que le son dans une pièce décroisse de 60 dB après extinction de la source. Cette valeur de 60 dB équivaut à une impression de disparition du son. Remarquons que la formulation de Sabine ne donne aucune indication sur la forme géométrique du local ainsi que sur la répartition des matériaux absorbants (ou de l'absorption des parois) dans la salle.

La représentation graphique du temps de réverbération en fonction du volume de la salle figure sur la page suivante dans un repère « log-linéaire ». On retiendra que le temps de réverbération d'après la loi de Sabine est proportionnel au volume du local et inversement proportionnel à l'absorption équivalente de la salle. Doubler l'absorption équivalente divise le temps de réverbération par deux.



Étudions le comportement « aux limites » de la formule de Sabine, d'abord dans le cadre théorique d'une chambre réverbérante où toutes les parois sont totalement réfléchissantes de coefficients d'absorption α nuls. Dans ce cas, l'aire de l'absorption équivalente de Sabine A est également nulle, il n'y a aucune absorption, et le temps de réverbération tend vers l'infini. Ce résultat serait difficile à obtenir en pratique, mais il est cohérent avec la physique.

Maintenant calculons le temps de réverbération dans une chambre sourde où les parois sont supposées totalement absorbantes et de coefficient $\alpha = 1$. Dans ce cas, l'aire de l'absorption équivalente de Sabine vaut S (S étant l'aire de la surface totale des parois). Le temps de réverbération qui serait obtenu avec la formulation de Sabine serait $0,16V/S$, qui est une valeur finie ! Or, en l'absence de réflexions le temps de réverbération est théoriquement nul ! Il existe donc une incohérence dans la formule et l'on peut présumer que son utilisation pour des locaux très amortis sera donc erronée.

La formule de Sabine n'est pas d'origine empirique mais découle d'un modèle mathématique qui suppose le **champ acoustique idéalement diffus**. Dans ce cas, la densité d'énergie réverbérée⁽¹⁾, notée ϵ_R (exprimée en J/m^3) est uniforme en tout point de l'espace, à un instant donné. En théorie, cette condition n'est réalisée que si les réflexions contre les parois sont de nature diffusante. En réalité, les réflexions ne sont que partiellement diffuses et il faut qu'un certain nombre de réflexions soit réalisé pour parfaire la diffusion du champ acoustique.

À l'arrêt de la source sonore dans un local clos, en considérant le champ acoustique parfaitement diffus, la variation de l'énergie réverbérée E_R totale s'écrit :

$$\frac{dE_R}{dt} = \frac{d(V \epsilon_R)}{dt} = V \frac{d\epsilon_R}{dt}$$

V étant le volume de la salle.

Or l'absorption contre les parois de la salle est la seule contribution à une diminution de la densité d'énergie réverbérée. On admettra que la fraction d'énergie réverbérée absorbée par unité de temps vaut $\frac{cA\varepsilon_R}{4}$. Il est cependant logique que cette énergie absorbée soit proportionnelle à l'aire d'absorption équivalente de Sabine A ainsi qu'à la densité d'énergie ε_R .

Il vient :

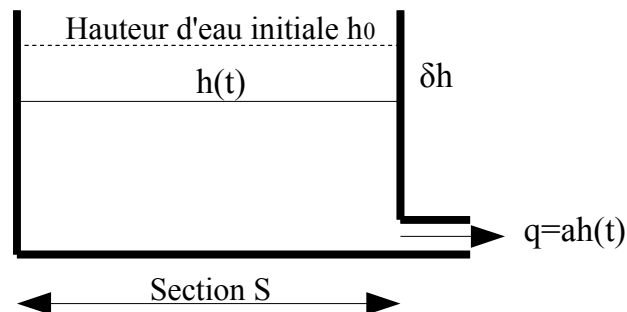
$$V \frac{d\varepsilon_R}{dt} = -\frac{cA\varepsilon_R}{4}$$

Le signe moins provient du fait que la variation d'énergie réverbérée est une diminution.

Il en découle une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant qui s'écrit :

$$V \frac{d\varepsilon_R}{dt} + \frac{cA\varepsilon_R}{4} = 0$$

Il peut être opportun de faire une analogie avec la vidange d'un réservoir :



q est le débit de fuite et δh la variation de la hauteur d'eau. L'équation de conservation des débits instantanés s'écrit alors :

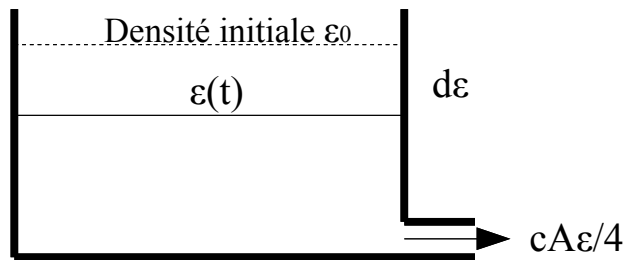
$$q = -S \frac{\delta h}{dt}$$

Comme le débit de fuite q est proportionnel à la pression au fond du réservoir qui elle-même est proportionnelle à la hauteur d'eau h , l'équation s'écrit en définitive:

$$S \frac{\delta h}{dt} + ah = 0$$

a étant un coefficient de proportionnalité.

On retrouve, aux constantes près, la même équation différentielle que pour la décroissance de la densité de l'énergie réverbérée dans un local clos.



Réolvons maintenant l'équation différentielle dont la solution donnera la loi de décroissance du champ réverbéré:

$$V \frac{d \epsilon_R}{dt} + \frac{cA \epsilon_R}{4} = 0$$

En séparant les variables :

$$\frac{d \epsilon_R}{\epsilon_R} = - \frac{cA}{4V} dt$$

Puis en intégrant :

$$\ln |\epsilon_R| = - \frac{cA}{4V} t + \ln |K|$$

K étant une constante d'intégration.

En supposant que le niveau d'énergie réverbéré stationnaire à l'instant initiale $t = 0$ vaut ϵ_0 , il vient aisément:

$$\ln \left| \frac{\epsilon_R}{\epsilon_0} \right| = - \frac{cA}{4V} t$$

soit encore

$$\epsilon_R(t) = \epsilon_0 e^{-\frac{cA}{4V} t}$$

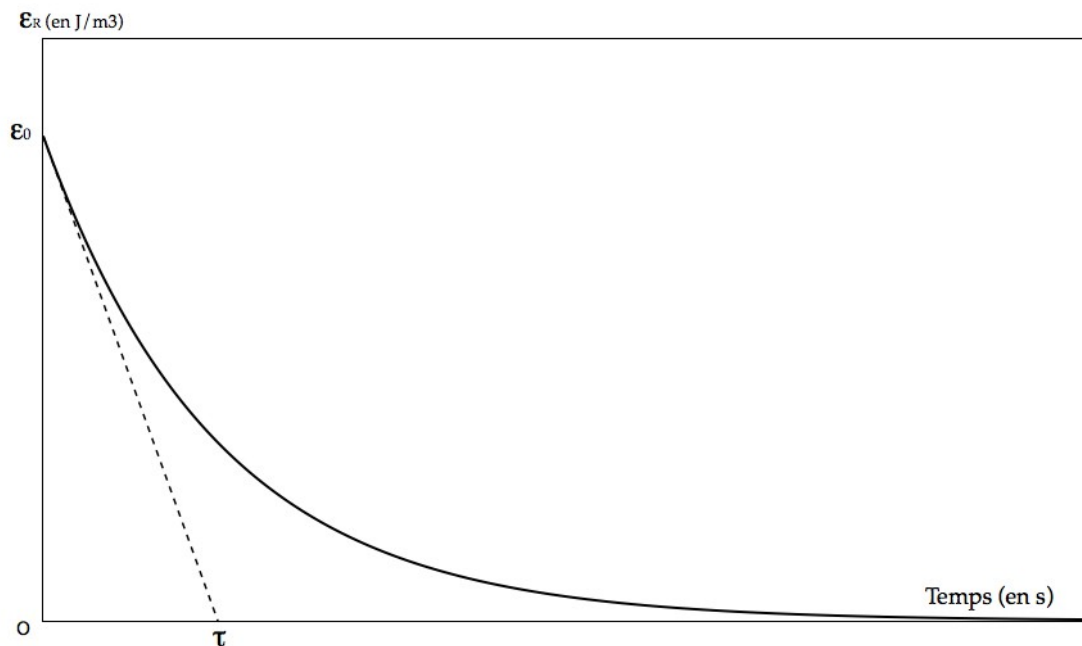
Il est d'usage d'introduire la constante de temps de la salle τ

$$\tau = \frac{4V}{cA}$$

Au final, il vient :

$$\epsilon_R(t) = \epsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La densité d'énergie réverbérée à l'extinction de la source suit une loi de la forme d'une exponentielle décroissante comme indiqué sur le graphique ci-dessous :



À partir de cette expression, et d'après la définition du temps de réverbération qui équivaut à la durée correspondant à une chute de niveau de -60 dB, il est possible de calculer le temps de réverbération. Le niveau d'énergie réverbérée est défini comme suit :

$$L_\epsilon = 10 \log \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{ref}}$$

Avec $\epsilon_{ref} = 2,94 \cdot 10^{-15} \text{ J/m}^3$

On a donc avec $t = TR$:

$$L_{\epsilon_R} - L_{\epsilon_0} = 10 \log \frac{\epsilon_R}{\epsilon_0} = -60 \text{ dB}$$

d'où

$$\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_0} = 10^{-6}$$

soit encore

$$e^{-\frac{TR}{\tau}} = 10^{-6}$$

puis après un bref calcul

$$TR = 13,82 \tau$$

avec $\tau = \frac{4V}{cA}$, il vient au final:

$$TR = \frac{55,3 V}{cA}$$

Cette dernière expression est généralement préférée à la formule initiale dans les commissions de normalisation⁽²⁾ car elle permet de prendre en compte la température du local dont dépend la célérité du son c . Pour une température de 20 °C avec $c = 343$ m/s et on retrouve la forme usuelle :

$$TR = \frac{0,16 V}{A}$$

La formule de Sabine peut inclure un terme supplémentaire l'absorption atmosphérique⁽³⁾ $4mV$ qui s'ajoute à l'absorption des parois. Dans ce cas on a :

$$TR = \frac{0,16 V}{A + 4mV}$$

m étant un facteur dépendant de la température et de l'hygrométrie de l'air de la salle.

La formule de Sabine ayant été établie en postulant le champ idéalement diffus, elle n'est strictement valable que lorsque cette condition est réalisée. En pratique, un tel contexte se retrouve plutôt dans des salles de grand volume où la diffusion est homogène et plutôt faiblement amortie. Ainsi, on admet que le coefficient d'absorption moyen⁽⁴⁾ de la salle ne doit pas excéder une valeur limite de 0,20.

En conclusion, l'usage de la formule de Sabine à des fins prédictives, que ce soit pour évaluer le temps de réverbération ou l'absorption de la pièce, doit s'accompagner de certaines précautions.

APPENDICE

Il s'agit de vérifier la validité du formalisme de Sabine en comparant la valeur théorique attendue issue de la formule avec le temps de réverbération réel mesuré in situ. Pour information, les temps de réverbération indiqués sont ceux de la bande d'octave centrée sur la fréquence de 500 Hz. Les calculs selon Sabine prennent en compte (sommairement) la présence d'objets dans les locaux. Le tableau ci-dessus résume les résultats :

Salle	Volume	TR Sabine	α moyen paroi	TR mesuré	Observation
n°1	82 m ³	0,45 s	0,25	0,78 s	Plafond acoustique
n°2	144 m ³	0,92 s	0,14	0,93 s	Plafond béton pièce non close
n°3	167 m ³	0,44 s	0,30	0,63 s	Plafond acoustique

Autant dire tout de suite que la bonne concordance de la théorie avec la mesure dans la salle n°2 est un coup chanceux et qu'il ne faut en tirer aucune conclusion hâtive ! Néanmoins, c'est aussi la seule des trois salles qui n'est pas pourvue d'un plafond acoustique absorbant et dont le coefficient d'absorption de Sabine moyen est inférieur 0,20.

Pour les salles n°1 et n°3 l'écart à la théorie est conséquente avec une sous évaluation importante du temps de réverbération. Le coefficient d'absorption de Sabine moyen est supérieur à la valeur limite de 0,20 pour les deux salles. Dans ce cas, il serait préférable d'effectuer un calcul selon la formule d'Eyring. Malgré tout, un calcul mené à l'aide du formalisme d'Eyring⁽⁵⁾ indiquerait des durées de réverbération encore plus faibles ! L'explication à ces anomalies se trouve dans la présence du plafond acoustique absorbant qui induit une forte hétérogénéité de la répartition de l'absorption dans le local et le champ diffus n'est pas réalisé. Dans ce cas, la formule de Sabine (comme celle d'Eyring) n'est pas valide. Il faut donc opter pour un autre modèle de calcul !

- (1) La densité d'énergie réverbérée est une énergie par unité de volume. Mais le calcul peut se mener également avec l'intensité acoustique réverbérée I_R . Il existe une relation de proportionnalité entre l'intensité et la densité d'énergie réverbérée, telle que $I_R = \frac{c \varepsilon_R}{4}$.
- (2) Notamment lors de la mesure de coefficients d'absorption de Sabine en chambre réverbérante selon la norme ISO 354 qui s'effectue par mesure de temps de réverbération.
- (3) L'absorption atmosphérique est négligeable dans les basses fréquences et n'est généralement prise en compte que pour les fréquences supérieures à 1 000 Hz.
- (4) Le coefficient d'absorption moyen est $\alpha_{moy} = \frac{A_{totale}}{S}$.
- (5) Voir aussi <http://www.conseils-acoustique.com/images/articles/formeyring.pdf>

Bibliographies :

<http://www.acoustics-engineering.com/sabin/wcsabine.htm>

Acoustique des salles et sonorisation de Jacques Jouhaneau (Collection CNAM édition TEC & DOC).

Audio de Mario Rossi (presses polytechniques et universitaires Romandes) .

Acoustic Absorbers and Diffusers, theory, design and application de Trevor J. Cox et Peter D'Antonio (édition Taylor & Francis Group).